

0.4

80502 DIGITAALINEN SUODATUS

Harjoitustehtäviä ja -ratkaisuja

by

Tapio Saramäki, Markku Renfors & Petri Jarske

Painovirhepahoja voi olla tässä versiossa. Älkää siis uskoko kaikkea heti!
Kaikenlaiset kommentit harjoitusten sisällöstä ovat tervetulleita.

Pauli Kuosmanen ja Olli Vainio ansaitsevat mitä parhaimmat kiitokset ansiokkaasta avusta kuvien teip-
paustyössä.

Tehtävä 1: Ovatko seuraavat järjestelmät (1) kausaalisia, (2) lineaarisia, (3) siirtoinvariantteja, (4) stabiileja?

(a) $y[n] = T(x[n]) = nx[n]$

(b) $y[n] = T(x[n]) = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k]$

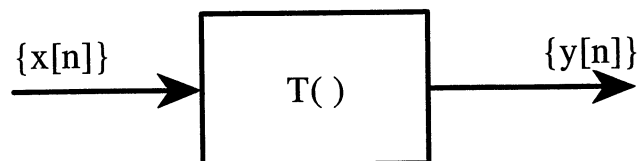
(c) $y[n] = T(x[n]) = e^{x[n]}$

Käydään ensin kertauksen vuoksi läpi perusmääritelmiä.

Diskreettiaikainen järjestelmä määritellään matemaattisesti kuvaukseksi $T(\)$ (katso kuva 1), joka yksikäsitteisesti kuvaa sisäänmenojonon (herätteen) $\{x[n]\}$ ulostulojonoksi (vasteeksi)

$$\{y[n]\} = T(\{x[n]\}).$$

Tässä kuvauksessa n tarkoittaa ajanhetkeä.



Kuva 1. Diskreettiaikainen järjestelmä.

Seuraavassa käytetään useimmiten jonolle merkintää $x[n]$, koska merkintä $\{x[n]\}$ on hankala.

Järjestelmä on **lineaarinen** joss (jos ja vain jos)

$$T(ax_1[n] + bx_2[n]) = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]).$$

Lineaarista järjestelmää siis luonnehtivat seuraavat ominaisuudet. Herätteiden $x_1[n]$ ja $x_2[n]$ vaste on herätteiden vasteiden $y_1[n] = T(x_1[n])$ ja $y_2[n] = T(x_2[n])$ summa. Lisäksi sisäänmenon $ax[n]$ vaste saadaan kertomalla herätteen $x[n]$ vaste $y[n] = T(x[n])$ a :lla. Jos järjestelmä on lineaarinen, niin silloin sisäänmenon

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k], \quad \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

vaste voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} y[n] &= T\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]T(\delta[n-k]) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n]. \end{aligned}$$

Tällaisen järjestelmän vaste mielivaltaiselle herätteelle voidaan siis esittää yksikäsitteisesti siirrettyjen yksikkönäytteiden $\delta[n-k]$:n vasteiden

$$h_k[n] = T(\delta[n-k])$$

avulla.

Siirtoinvarianttia järjestelmää luonnehtii ominaisuus: jos $y[n]$ on $x[n]$:n vaste, niin $y[n-k]$ on $x[n-k]$:n vaste eli $T(x[n]) = y[n] \Rightarrow T(x[n-k]) = y[n-k]$. Siirtoinvariantin järjestelmän toiminta ei siis ole riippuvainen ajasta. Mikäli järjestelmä on sekä lineaarinen että siirtoinvariantti, niin silloin

$$h_k[n] = h_0[n-k] \equiv h[n-k]$$

⇒ Järjestelmä ei ole siirtoinvariantti.

Koska järjestelmä on lineaarinen, siirtoinvarianttius voidaan selvittää myös vasteen $h_k[n] = T(\delta[n - k])$ avulla:

$$h_k[n] = n\delta[n - k] \neq [n - k]\delta[n - k] = h_0[n - k].$$

Kun sisäänmenona on yksikköaskeljono

$$x[n] = u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0, \end{cases}$$

niin ulostuloksi saadaan

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ n, & n \geq 0. \end{cases}$$

$y[n] = n \rightarrow \infty$, kun $n \rightarrow \infty$.

⇒ Järjestelmä on epästabiili.

$y[n_0] = T(x[n_0]) = n_0x[n_0] \Rightarrow$ Ulostulo arvolla $n = n_0$ riippuu sisäänmenosta vain kun $n = n_0$.

⇒ Järjestelmä on kausaalinen.

$$\mathbf{1(b):} \quad y[n] = T(x[n]) = \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k]$$

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= \sum_{k=n-m}^{n+m} (ax_1[k] + bx_2[k]) \\ &= a \sum_{k=n-m}^{n+m} x_1[k] + b \sum_{k=n-m}^{n+m} x_2[k] = aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

⇒ Järjestelmä on lineaarinen.

$$\begin{aligned} T(x[n-r]) &= \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k-r] \\ &\stackrel{l=k-r}{=} \sum_{l=(n-r)-m}^{(n-r)+m} x(l) = y[n-r] \end{aligned}$$

⇒ Järjestelmä on siirtoinvariantti.

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n \in \mathbf{Z} \quad \Rightarrow \quad y[n] = \left| \sum_{k=n-m}^{n+m} x[k] \right| \leq \sum_{k=n-m}^{n+m} |x[k]| \leq (2m+1)B_x < \infty$$

⇒ Järjestelmä on stabiili.

$y[n_0] = T[x[n_0]] = \sum_{k=n_0-m}^{n_0+m} x[k] \Rightarrow$ ulostulo arvolla $n = n_0$ riippuu sisäänmenosta myös kun $n = n_0 + 1, n = n_0 + 2, \dots, n = n_0 + m$.

⇒ Järjestelmä ei ole kausaalinen.

1(c): $T(x[n]) = e^{x[n]}$

$$\begin{aligned} T(ax_1[n] + bx_2[n]) &= e^{(ax_1[n] + bx_2[n])} = e^{ax_1[n]} \cdot e^{bx_2[n]} = \left(e^{x_1[n]}\right)^a \cdot \left(e^{x_2[n]}\right)^b \\ &= \left(T(x_1[n])\right)^a \cdot \left(T(x_2[n])\right)^b \neq aT(x_1[n]) + bT(x_2[n]) \end{aligned}$$

⇒ Järjestelmä ei ole lineaarinen.

$$T(x[n-k]) = e^{x[n-k]} = y[n-k]$$

⇒ Järjestelmä on siirtoinvariantti.

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \Rightarrow |y[n]| = |e^{x[n]}| \leq e^{B_x} < \infty$$

\Rightarrow Järjestelmä on stabiili.

$y[n_0] = T(x[n_0]) = e^{x[n_0]} \Rightarrow$ ulostulo arvolla $n = n_0$ riippuu sisäänmenosta vain kun $n = n_0$.

\Rightarrow Järjestelmä on kausaalinen.

Tehtävä 2: Tarkastellaan kausaalista järjestelmää, joka toteuttaa differenssiyhtälön $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$. (a) Mikä on järjestelmän yksikkönäytevaste? (b) Millä a :n arvolla järjestelmä on stabiili? (c) Mikä on järjestelmän vaste herätteelle $x[n] = u[n] - u[n - N]$?

2(a): Lasketaan järjestelmän yksikkönäytevaste (impulssivaste) eli vaste herätteelle

$$x[n] = \delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

Koska järjestelmä on kausaalinen, siitä ei tule ulos mitään ennen nollasta poikkeavaa sisäänmenoa.

$$x[n] = \delta[n] = 0, n < 0 \Rightarrow y[n] = h[n] = 0, n < 0$$

$$h[0] = ah[-1] + \delta[0] = 1$$

$$h[1] = ah[0] + \delta[1] = a$$

$$h[2] = ah[1] + \delta[2] = a^2$$

...

$$h[n] = ah[n - 1] = a^2h[n - 2] = \dots = a^n h[0] = a^n$$

$$\Rightarrow h[n] = a^n u[n],$$

missä

$$u[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ 1, & n \geq 0 \end{cases}$$

on yksikköaskel.

Nopein tie ratkaisun löytämiseen on z -muunnos, joka on diskreettiaikaisten järjestelmien analyysissä ja synteessissä tärkein matemaattinen työväline. Kurssissamme jonon $\{x[n]\}$ z -muunnos määriteltiin

$$X(z) = Z(x[n]) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}.$$

Joissain oppikirjoissa käytetään z^{-1} :n sijasta z :aa. Useilla jonoilla voi olla sama z -muunnos. Jotta jono olisi yksikäsitteinen, täytyy tuntea myös z -muunnoksen suppenemialue, kuten myöhemmin ennen kaikkea tehtävän 5 yhteydessä esitetään. Suppenemialue on se z -tason alue, jossa sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$ suppenee itseisesti eli sarja $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}|$ suppenee. Tässä kurssissa tarkastellaan lähes yksinomaan kausaalisia jonoja $\{x[n]\}$, joille $x[n] = 0$, kun $n < 0$. Tällaisen jonon z -muunnoksen suppenemialue on muotoa $|z| > R$, missä R on z -muunnoksen kauimpana origosta sijaitsevan navan etäisyys origosta.

Kertauksen vuoksi käydään läpi joitakin hyödyllisiä z -muunnoksen ominaisuuksia. Tavallisesti z -muunnos voidaan esittää muodossa

$$X(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M p_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N q_k z^{-k}}.$$

Käänteinen z -muunnos voidaan löytää helpoimmin esittämällä $X(z)$ osamur-

tokehitelmänä. Ensimmäinen vaihe on kirjoittaa $X(z)$ alla olevaan muotoon

$$X(z) = B_{M-N}z^{M-N} + B_{M-N-1}z^{M-N-1} + B_1z^{-1} + B_0 + \tilde{X}(z),$$

missä

$$\tilde{X}(z) = \frac{\tilde{P}_R(z)}{Q_N(z)} = \frac{\sum_{k=0}^R \tilde{p}_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N q_k z^{-k}}$$

ja $\tilde{P}_R(z)$:n asteluku R on pienempi kuin N . Yllä olevassa yhtälössä B_k :t ovat nollija ja $\tilde{P}_R(z) \equiv P_M(z)$, jos $M < N$. Toinen vaihe on jakaa $Q_N(z)$ tekijöihinsä

$$Q_N(z) = \prod_{k=1}^N (1 - a_k z^{-1})$$

ja esittää $\tilde{P}_R(z)/Q_N(z)$ osamurtokehitelmänä

$$\frac{\tilde{P}_R(z)}{Q_N(z)} = \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - a_k z^{-1}}.$$

Näissä yhtälöissä a_k :t ovat $\tilde{X}(z)$:n navat eli $Q_N(z)$:n juuret. A_k :t voidaan määrätä yhtälöistä

$$A_k = (1 - a_k z^{-1}) \tilde{X}(z) \Big|_{z = a_k}.$$

Huomautettakoon se, että sama tulos saadan aikaan, jos $\tilde{X}(z)$:n sijasta käytetään $X(z)$:aa. Jos $Q_N(z)$ on muotoa

$$Q_N(z) = (1 - a_i z^{-1})^s \prod_{k=1}^{N-s} (1 - a_k z^{-1})$$

eli $Q_N(z)$:lla on s -kertainen juuri pisteessä $z = a_i$, niin osamurtokehitelmäksi tulee

$$\frac{\tilde{P}_R(z)}{Q_N(z)} = \sum_{k=1}^{N-s} \frac{A_k}{1 - a_k z^{-1}} + \sum_{k=1}^s \frac{C_k}{(1 - a_i z^{-1})^k}$$

A_k :t voidaan määrätä kuten edellä. C_k :t saadaan yhtälöstä

$$C_k = \frac{1}{(s-k)!} \left\{ \frac{d^{s-k}}{dx^{s-k}} [1 - a_i x]^s \widehat{X}(x) \right\} \Big|_{x = a_i^{-1}}$$

missä

$$\widehat{X}(x) = \frac{\sum_{k=0}^R \tilde{p}_k x^k}{1 + \sum_{k=1}^N q_k x^k}.$$

Yllä olevassa yhtälössä on yksinkertaisuuden vuoksi käytetty muuttujan z^{-1} sijasta muuttujaa $x = z^{-1}$. Käänteinen z -muunnos voidaan sitten määrätä kunhan tunnetaan z -muunnoksen suppenemisalue, joka on yleisesti muotoa

$$r_a < |z| < r_b.$$

Jos $|a| \leq r_a$, saadaan seuraavat muunnosparit:

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\iff \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ (n+1)a^n u[n] &\iff \frac{1}{(1 - az^{-1})^2} \\ \frac{(n+1)(n+2)}{2!} a^n u[n] &\iff \frac{1}{(1 - az^{-1})^3} \\ \frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} a^n u[n] &\iff \frac{1}{(1 - az^{-1})^k}. \end{aligned}$$

Yllä olevien jonojen alkiot ovat nollia, kun $n < 0$. Tällaisia jonoja, joiden alkioden arvot ovat nolosta poikkeavia vain positiivisilla n :n arvoilla tai kun $n = 0$, kutsutaan usein kausaalisiksi. Jos $|a| \geq r_b$, saadaan seuraavat muunnosparit:

$$-a^n u[-n-1] \iff \frac{1}{1 - az^{-1}}$$

$$\begin{aligned} -(n+1)a^n u[-n-2] &\iff \frac{1}{(1-az^{-1})^2} \\ -\frac{(n+1)(n+2)}{2!}a^n u[-n-3] &\iff \frac{1}{(1-az^{-1})^3} \\ -\frac{(-1)^k(-n-1)!}{(-n-k)!(k-1)!}a^n u[-n-k] &\iff \frac{1}{(1-az^{-1})^k}. \end{aligned}$$

Ensimmäinen jonon alkio on nolla kun $n > 0$, k :nnen jonon alkio on nolla kun $n > -k+1$. Tällaisia jonoja, joiden alkioiden arvot ovat nolasta poikkeavia vain negatiivisilla n :n arvoilla, kutsutaan usein ei-kausaaliksi (anticausal).

Edellä esitetyn $X(z)$:n käänteismuunnoksen etsimiseksi tavitaan lisäksi muunnospari

$$\delta[n-k] \iff z^{-k}.$$

Huomautettakoon, että a_k :t voivat olla myös kompleksisia edellä esitetyissä yhtälöissä.

Ottamalla z -muunnos yhtälön

$$y[n] = ay[n-1] + x[n]$$

molemmista puolista ja muistamalla z -muunnoksen ominaisuus $Z(x[n+n_0]) = z^{n_0}X(z)$, saadaan

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) \iff Y(z) = \frac{X(z)}{1-az^{-1}}.$$

Kun sisäänmenona on yksikkönäyte $\{\delta[n]\}$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1$$

ja järjestelmän yksikkönäytevasteen $\{h[n]\}$ z -muunnokseksi saadaan

$$H(z) = \frac{X(z)}{1-az^{-1}} = \frac{1}{1-az^{-1}}.$$

$H(z)$ on nimeltään järjestelmän siirtofunktio. Siirtofunktion tärkein ominaisuus on se, että jos herätteen z -muunnos on $X(z)$, niin vasteen z -muunnos on $Y(z) = H(z)X(z)$ eli

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}.$$

Koska järjestelmä on kausaalinen, $h[n] = 0$, $n < 0$, ja suppenemisalue on $|z| > |a|$. Käyttämällä hyväksi edellä esitettyjä muunnospareja saadaan

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \iff h[n] = a^n u[n].$$

2(b): Stabiilin järjestelmän siirtofunktion kaikkien napojen tulee sijaita yksikköympyrän sisäpuolella eli suppenemisalueen tulee olla muotoa $|z| > R < 1$, missä R on kauimpana origosta sijaitsevan navan itseisarvo. Käsiteltävän järjestelmän siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

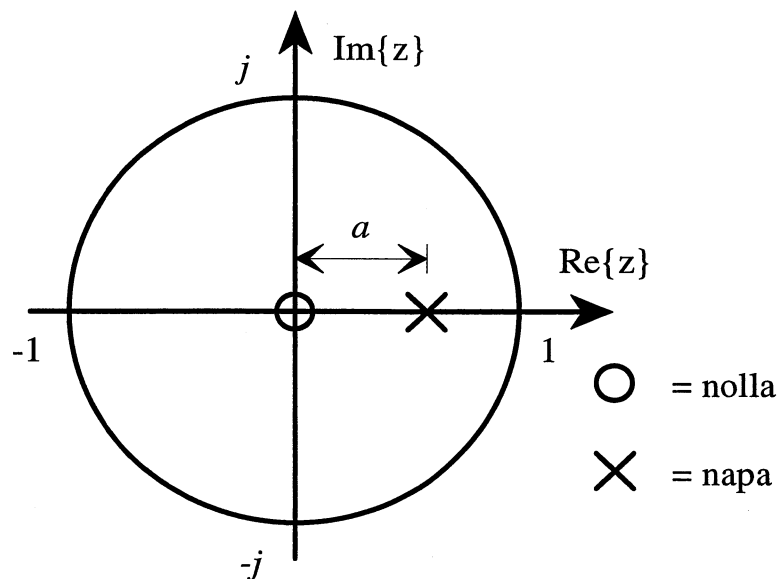
$$H(z) = \frac{z}{z - a},$$

joten sillä on nolla pisteessä $z = 0$ ja napa pisteessä $z = a$ (katso kuva 2). Järjestelmä on näin ollen stabiili, jos $|a| < 1$. Sama tulos saataisiin tarkastelemalla järjestelmän yksikkönäytevasteteita eri a :n arvoilla (katso kuva 3). Kun $0 < a < 1$ tai $-1 < a < 0$, yksikkönäytevaste $h[n]$ lähestyy arvoa nolla, kun $n \rightarrow \infty$. Näissä tapauksissa

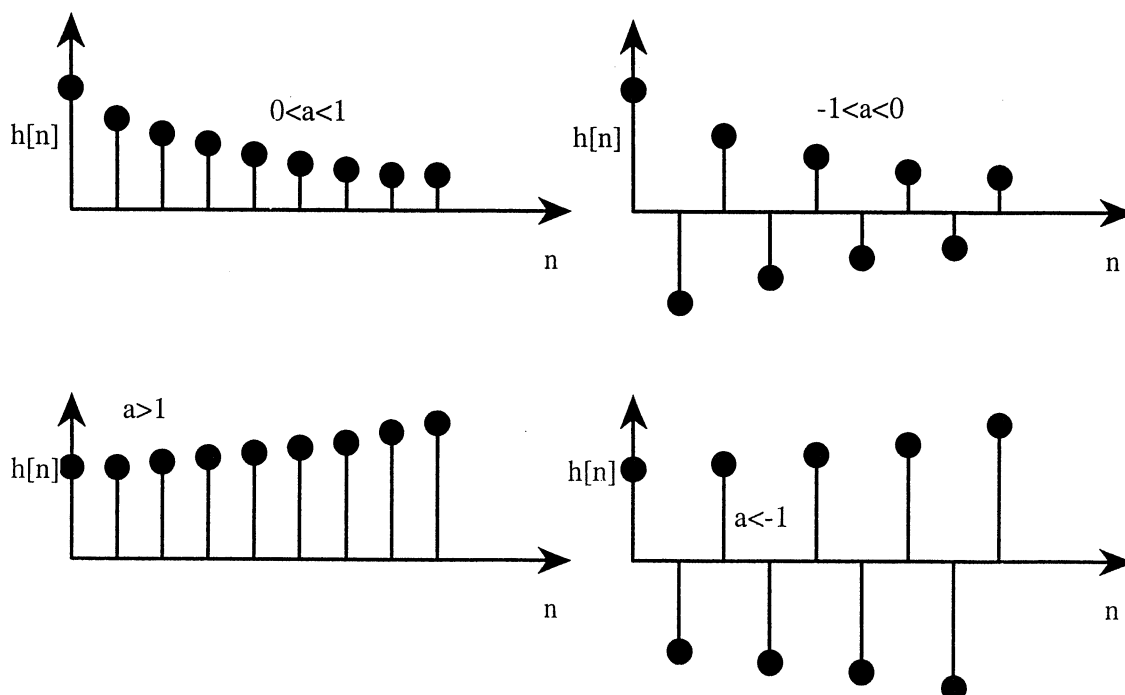
$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \sum_{k=0}^{\infty} |a|^k = 1/(1 - |a|) < \infty,$$

joten järjestelmä on stabiili (sarja $1 + |a|^1 + |a|^2 + |a|^3 + \dots$ on geometrinen sarja ja se suppenee kun $|a| < 1$.) Kun $a > 1$, $h[n]$ lähestyy ääretöntä, kun $n \rightarrow \infty$. Kun $a < -1$, $h[n]$ lähestyy n :n parillisilla arvoilla arvoa ∞ ja n :n parittomilla arvoilla arvoa $-\infty$, kun n lähestyy ääretöntä. Näissä tapauksissa järjestelmä on selvästi epästabiili. Erikoistapauksessa $a = 1$, $h[n] = 1 \forall n \geq 0$.

Kun $a = -1$, $h[n]$ on 1 n :n parillisilla arvoilla ja -1 n :n parittomilla arvoilla. Näissä erikoistapauksissa järjestelmä on stabiilin ja selvästi epästabiilin rajalla. Järjestelmä on kuitenkin luokiteltava epästabiiliksi, koska yksikkönäyteväste ei lähesty nollaa n :n kasvaessa.



Kuva 2. Tehtävän 2 järjestelmän nolla-napakuvio.



Kuva 3. Tehtävän 2 järjestelmän yksikkönäyteväste eri a :n arvoilla.

2(c): Lasketaan nyt käsiteltävän järjestelmän vaste $\{y[n]\}$ herätteelle $\{x[n]\} = \{u[n] - u[n - N]\}$ käyttäen hyväksi tietoa

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\}$$

eli

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u[k] - u[k-N]) \cdot a^{n-k}u[n-k]$$

$$u[k] = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1, & k \geq 0. \end{cases}$$

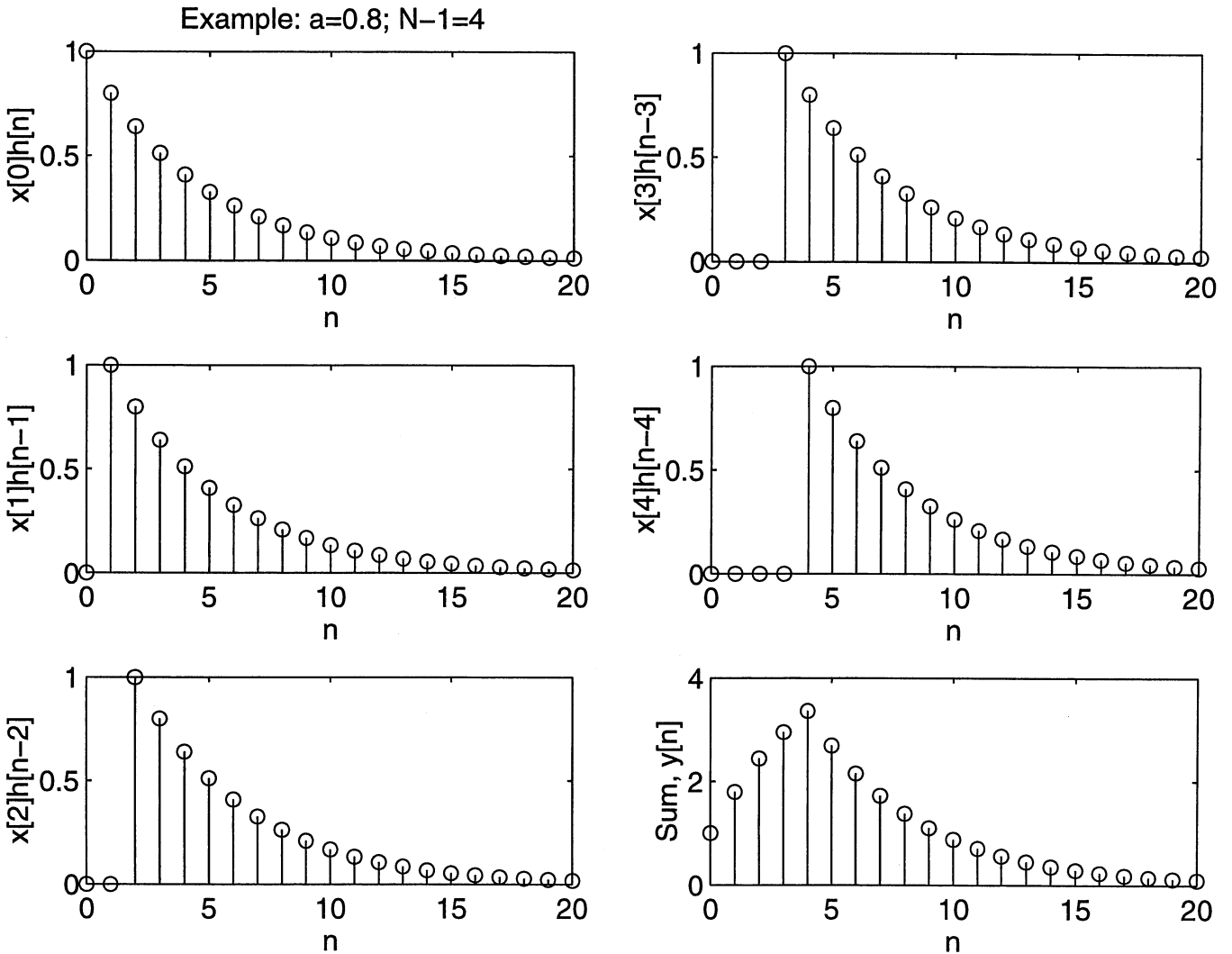
$$\Rightarrow u[k] - u[k-N] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

$$\Rightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k}u[n-k],$$

$$u[n-k] = \begin{cases} 1, & k \leq n \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Tästä seuraa (katso asian valottamiseksi kuva 4)

$$\begin{aligned} y[n] &= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \sum_{k=0}^n a^{n-k}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ \sum_{k=0}^{N-1} a^{n-k}, & n \geq N \end{cases} = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ a^n \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a^{-1}}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^n \frac{1-a^{-N}}{1-a^{-1}}, & n \geq N \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-a^{-(n+1)}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n+1} \frac{a^{-N}-1}{1-a}, & n \geq N. \end{cases} \end{aligned}$$



Kuva 4. Vasteen laskeminen käyttäen suoraa konvoluutiota.

Ongelma voidaan ratkaista nopeammin käyttämällä z -muunnosta, jonka tärkein ominaisuus on se, että konvoluutiojonon

$$\{y[n]\} = \{x[n]\} * \{h[n]\}$$

z -muunnos on

$$Y(z) = H(z)X(z),$$

missä $H(z)$ on jonon $\{h[n]\}$ z -muunnos ja $X(z)$ on jonon $\{x[n]\}$ z -muunnos. $\{h[n]\}$:n z -muunnos on $H(z) = 1/(1 - az^{-1})$. Jonon $\{x[n]\} = \{u[n] - u[n - N]\}$ z -muunnokseksi saadan käyttämällä hyväksi tietoja: $Z(u[n]) = 1/(1 - z^{-1})$ ja

$Z(u[n - N]) = z^{-N}/(1 - z^{-1})$. Näiden avulla saadaan z -muunnos seuraavaan muotoon

$$X(z) = \frac{1 - z^{-N}}{1 - z^{-1}}.$$

Täten

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{(1 - z^{-N})}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})}.$$

Etsitään $1/[(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})]$:lle osamurtokehitemmä

$$\frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{A}{1 - az^{-1}} + \frac{B}{1 - z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{(1 - z^{-1})} \Big|_{z=a} = \frac{1}{1 - 1/a} = \frac{a}{a - 1}$$

$$B = \frac{1}{(1 - az^{-1})} \Big|_{z=1} = \frac{1}{1 - a}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{1 - a} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right] - \frac{z^{-N}}{1 - a} \left[\frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{a}{1 - az^{-1}} \right]$$

Koska ulostulo on kausaalinen, suppenemisalue on $|z| > \max\{1, a\}$. Käyttämällä hyväksi z -muunnoksen ominaisuutta

$$Z(x[n - N]) = z^{-N}X(z)$$

sekä muunnostaulukoista saatavia yhteyksiä

$$\frac{1}{1 - z^{-1}} \iff u[n]$$
$$\frac{1}{1 - az^{-1}} \iff a^n u[n],$$

saadaan

$$y[n] = \frac{1}{1 - a}(1 - a^{n+1})u[n] - \frac{1}{1 - a}(1 - a^{n+1-N})u[n - N]$$

$$= \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \frac{1-a^{(n+1)}}{1-a}, & 0 \leq n \leq N-1 \\ a^{n+1} \frac{a^{-N}-1}{1-a}, & n \geq N. \end{cases}$$

Tulos on sama kuin se, joka saatiin suoraa konvoluutiota käyttäen.

Tehtävä 3: Tarkastellaan järjestelmää joka toteuttaa toisen kertaluvun differenssiyhtälön

$$y[n] = x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2].$$

(a) Milloin järjestelmä on stabiili? (b) Mikä on järjestelmän taajuusvaste ja vaste herätteelle $x[n] = \cos \omega_0 n$? (c) Laske yksikkönäyte- ja yksikköaskelvasteet, kun $a_1 = 3/4$ ja $a_2 = 1/8$? (d) Mikä on yksikkönäytevaste, kun $a_1 = 1$ ja $a_2 = -1/2$?

3(a):

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] \\ \iff y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2] &= x[n] \end{aligned}$$

z -muuntamalla yllä olevan yhtälön molemmat puolet saadaan

$$Y(z)(1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}) = X(z).$$

Tästä saadaan yksikkönäytevasteen z -muunnokseksi eli järjestelmän siirtofunktioksi

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

$H(z)$:n navat voidaan määrätä asettamalla $H(z)$:n nimittäjäpolynomi nolllaksi eli ratkaisemalla yhtälö

$$z^2 - a_1 z - a_2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}).$$

Kausaalisen stabiilin järjestelmän napojen tulee sijaita yksikköympyrän sisäpuolella.

Kun $a_1^2 > -4a_2$, navat ovat reaaliset ja uloimpana origosta sijaitseva napa on pisteessä

$$z = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}), & a_1 > 0 \\ \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}), & a_1 < 0 \end{cases}$$

eli ehto stabiilisuudelle on:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2}(a_1 + \sqrt{a_1^2 + 4a_2}) \right| < 1 & \text{ kun } a_1 > 0 \\ \left| \frac{1}{2}(a_1 - \sqrt{a_1^2 + 4a_2}) \right| < 1 & \text{ kun } a_1 < 0. \end{aligned}$$

Kun $a_1^2 < -4a_2$, navat ovat kompleksikonjugaattipareja

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}(a_1 \pm j\sqrt{-a_1^2 - 4a_2}).$$

Näiden napojen etäisyys origosta on sama ja ehto stabiilisuudelle on:

$$|z_1| = \left[\text{Re}^2\{z_1\} + \text{Im}^2\{z_1\} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(-4a_2)^{\frac{1}{2}} < 1$$

eli

$$-a_2 < 1.$$

Kun $a_1^2 = -4a_2$, $z_{1,2} = a_1/2$ ja ehto stabiilisuudelle on: $|a_1| < 2$.

3(b): Järjestelmän taajuusvaste on

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{1 - a_1 e^{-j\omega} - a_2 e^{-j2\omega}} \\ &= \frac{1}{1 - a_1 \cos \omega + ja_1 \sin \omega - a_2 \cos 2\omega + ja_2 \sin 2\omega} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(1 - a_1 \cos \omega - a_2 \cos 2\omega) + j(a_1 \sin \omega + a_2 \sin 2\omega)}$$

$$= |H(e^{j\omega})| e^{j\phi(\omega)},$$

missä amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ ja vaihevaste $\phi(\omega)$ voidaan kirjoittaa seuraaviin muotoihin

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{1}{[(1 - a_1 \cos \omega - a_2 \cos 2\omega)^2 + (a_1 \sin \omega + a_2 \sin 2\omega)^2]^{\frac{1}{2}}}$$

$$\phi(\omega) = -\arctan \left[\frac{a_1 \sin \omega + a_2 \sin 2\omega}{1 - a_1 \cos \omega - a_2 \cos 2\omega} \right].$$

Koska jonon $x[n] = e^{jn\omega_0}$ vaste on $y[n] = H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0}$, on jonon

$$x[n] = \cos n\omega_0 = \frac{1}{2}(e^{jn\omega_0} + e^{-jn\omega_0})$$

vaste

$$y[n] = \frac{1}{2} [H(e^{j\omega_0})e^{jn\omega_0} + H(e^{-j\omega_0})e^{-jn\omega_0}]$$

$$= \frac{1}{2} [|H(e^{j\omega_0})|e^{j(n\omega_0 + \phi(\omega_0))} + |H(e^{-j\omega_0})|e^{-j(n\omega_0 + \phi(\omega_0))}]$$

$$= |H(e^{j\omega_0})| \cos(n\omega_0 + \phi(\omega_0)).$$

Yllä olevan lausekkeen johdossa on käytetty hyväksi ominaisuuksia: $|H(e^{-j\omega})| = |H(e^{j\omega})|$ ja $\phi(-\omega) = -\phi(\omega)$.

3(c): Kun $a_1 = 3/4$ ja $a_2 = -1/8$, saadaan siirtofunktioksi

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2}}.$$

Navat ovat tällöin

$$z_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{8}{16}} \right)$$

$$\Rightarrow z_1 = 1/2, \quad z_2 = 1/4.$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \Big|_{z = \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{4}} = 2$$

$$B = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z = \frac{1}{4}} = \frac{1}{1 - 2} = -1$$

$$\Rightarrow h[n] = 2(1/2)^n u[n] - (1/4)^n u[n].$$

Koska yksikköaskeljonon z -muunnos on $1/(1-z^{-1})$, saadaan yksikköaskelvasteen z -muunnokseksi

$$Y(z) = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{A}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{B}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{C}{1 - z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Big|_{z = \frac{1}{2}} = -2$$

$$B = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})} \Big|_{z = \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$C = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} \Big|_{z = 1} = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow y[n] = -2(1/2)^n u[n] + \frac{1}{3}(1/4)^n u[n] + \frac{8}{3}u[n].$$

3(d): Kun $a_1 = 1$ ja $a_2 = -1/2$, saadaan siirtofunktion navoiksi

$$z^2 - z + 1/2 = 0 \Rightarrow z_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{1-2})$$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{1}{2}(1 + j), \quad z_2 = \frac{1}{2}(1 - j)$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})} = \frac{A}{1 - z_1 z^{-1}} + \frac{B}{1 - z_2 z^{-1}}$$

$$A = \frac{1}{1 - z_2 z_1^{-1}} = \frac{z_1}{z_1 - z_2} = \frac{\frac{1}{2}(1 + j)}{j} = \frac{1}{2}(1 - j)$$

$$B = \frac{1}{1 - z_1 z_2^{-1}} = \frac{z_2}{z_2 - z_1} = \frac{\frac{1}{2}(1 - j)}{-j} = \frac{1}{2}(1 + j)$$

$$\Rightarrow h[n] = \frac{1}{2} \left[(1 - j) \left(\frac{1 + j}{2} \right)^n + (1 + j) \left(\frac{1 - j}{2} \right)^n \right] u[n]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + j}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - j}{2} \right)^n \right] u[n] + j \frac{1}{2} \left[- \left(\frac{1 + j}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - j}{2} \right)^n \right] u[n]$$

$$\frac{1 + j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\pi/4}, \quad \frac{1 - j}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-j\pi/4}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + j}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - j}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4} \right) = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \cos \frac{n\pi}{4}$$

$$- \left(\frac{1 + j}{2} \right)^n + \left(\frac{1 - j}{2} \right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \left(-e^{jn\pi/4} + e^{-jn\pi/4} \right) = -2j \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^n \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$\Rightarrow h[n] = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left(\cos \frac{n\pi}{4} + \sin \frac{n\pi}{4}\right)u[n].$$

Tehtävä 4: Määrää seuraavien jonojen z -muunnokset sekä selvitä suppenemisaralue:

a) $x[n] = u[n + 3] - u[n - 5]$

b) $x[n] = 2^{-|n|}$

c) $x[n] = \cos(\omega_0 n)u[n]$

d) $x[n] = \begin{cases} 3^{-n} + 4^{-n}, & n \geq 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases}$

e) $x[n] = n^2 a^n u[n].$

4(a):

$$x[n] = u[n + 3] - u[n - 5] = \begin{cases} 1, & -3 \leq n \leq 4 \\ 0, & \text{muulloin.} \end{cases}$$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = \sum_{n=-3}^4 z^{-n} = z^3 + z^2 + z^1 + 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4}.$$

$X(z)$:n suppenemisaralue on z -tason alue, jossa sarja

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}|$$

suppenee. Tarkateltavana oleva sarja suppenee muualla paitsi pisteissä $z = 0$ ja $z = \infty$. Suppenemisaralue on siis $0 < |z| < \infty$.

4(b): $x[n] = 2^{-|n|}$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} z^{-n}. \end{aligned}$$

Molemmat yllä olevat osasarjat ovat geometrisia sarjoja. Käyttämällä hyväksi tietoa, että sarjan $a + aq + aq^2 + aq^3 \dots$ summa on $a/(1 - q)$, saadaan

$$X(z) = \frac{2^{-1}z}{1 - 2^{-1}z} + \frac{1}{1 - 2^{-1}z^{-1}} = \frac{-\frac{2}{3}z^{-1}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}.$$

I sarja suppenee (itseisesti) kun $|2^{-1}z| < 1$ ja II sarja kun $|2^{-1}z^{-1}| < 1$. \Rightarrow suppenemisarve on $\frac{1}{2} < |z| < 2$ (Geometrinen sarja $1 + a^1 + a^2 + a^3 \dots$ suppenee itseisesti kun $|a| < 1$).

4(c): $x[n] = \cos(\omega_0 n)u[n]$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\omega_0 n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} (e^{j\omega_0 n} + e^{-j\omega_0 n}) z^{-n} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{j\omega_0 n} z^{-n} + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-j\omega_0 n} z^{-n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{j\omega_0} z^{-1}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-j\omega_0} z^{-1}} \\ &= \frac{1 - \cos \omega_0 z^{-1}}{1 - 2 \cos \omega_0 z^{-1} + z^{-2}}. \end{aligned}$$

I sarja suppenee (itseisesti) kun $|e^{j\omega_0} z^{-1}| < 1$ ja II sarja kun $|e^{-j\omega_0} z^{-1}| < 1$. \Rightarrow suppenemisarve on $|z| > 1$.

4(d):

$$x[n] = \begin{cases} 3^{-n} + 4^{-n}, & n \geq 0 \\ 2^n, & n < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^n z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^{-n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n} z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} z^{-n} \\ &= \frac{2^{-1}z}{1 - 2^{-1}z} + \frac{1}{1 - 3^{-1}z^{-1}} + \frac{1}{1 - 4^{-1}z^{-1}} \\ &= \frac{1 - 4z^{-1} + 1\frac{1}{12}z^{-2}}{(1 - 2z^{-1})(1 - \frac{1}{3}z^{-1})(1 - \frac{1}{4}z^{-1})}. \end{aligned}$$

I sarja suppenee (itseisesti) kun $|z| < 2$, II sarja kun $|z| > 1/3$ ja III sarja kun $|z| > 1/4$. \Rightarrow suppenemisarve on $1/3 < |z| < 2$.

4(e) $x[n] = n^2 a^n u[n]$

Käytetään hyväksi tietoa

$$Z[nx[n]] = -z \frac{dX(z)}{dz}.$$

$$\begin{aligned} a^n u[n] &\iff \frac{1}{1 - az^{-1}} \\ \Rightarrow na^n u[n] &\iff -z \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{1 - az^{-1}} \right) = \frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \\ \Rightarrow n^2 a^n u[n] &\iff -z \frac{d}{dz} \left(\frac{az^{-1}}{(1 - az^{-1})^2} \right) = \frac{az^{-1}(1 + az^{-1})}{(1 - az^{-1})^3}. \end{aligned}$$

Suppenemisaralue on sama kuin jonon $a^n u[n]$ suppenemisaralue eli $|z| > |a|$.

Tehtävä 5: Suorita käänteinen z -muunnos z -muunokselle

$$X(z) = \frac{z - 1}{z^2 + z - \frac{3}{4}},$$

kun suppenemisaralue on

- (a) $|z| > 3/2$
- (b) $1/2 < |z| < 3/2$
- (c) $|z| < 1/2$.

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z - 1}{z^2 + z - \frac{3}{4}} = \frac{z^{-1} - z^{-2}}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{-(4 + z^{-1})/3}{1 + z^{-1} - \frac{3}{4}z^{-2}} = \frac{4}{3} + \frac{-(4 + z^{-1})/3}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 + \frac{3}{2}z^{-1})} \\ &= \frac{4}{3} + \frac{A}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{B}{(1 + \frac{3}{2}z^{-1})} \\ A &= -\frac{(4 + z^{-1})/3}{1 + \frac{3}{2}z^{-1}} \Big|_{z = \frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \\ B &= -\frac{(4 + z^{-1})/3}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \Big|_{z = -\frac{3}{2}} = -\frac{5}{6} \\ X(z) &= \frac{4}{3} + \frac{-\frac{1}{2}}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{-\frac{5}{6}}{(1 + \frac{3}{2}z^{-1})} \\ &= \frac{4}{3} + X_1(z) + X_2(z). \end{aligned}$$

$X(z)$:n käänteinen z -muunnos on muotoa

$$x[n] = \frac{4}{3}\delta[n] + x_1[n] + x_2[n],$$

missä $x_1[n]$ ($x_2[n]$) on termin $X_1(z)$ ($X_2(z)$) käänteinen z -muunnos. $x_1[n]$ ja $x_2[n]$ voidaan määrätä yksikäsitteisesti vasta kun z -muunnoksen suppenemisalue on annettu.

5(a): $|z| > \frac{3}{2}$

Tällöin sekä $X_1(z)$ että $X_2(z)$ vastaavat kausaalisia jonoja ($x_1[n] = x_2[n] = 0, n < 0$), koska kummankin termin sisältämä napa on suppenemisalueen sisäpuolella.

Käyttämällä tehtävän 2 yhteydessä esiteltyjä muunnospareja saadaan

$$x_1[n] = -\frac{1}{2}(1/2)^n u[n] = -(1/2)^{n+1} u[n]$$

$$x_2[n] = -\frac{5}{6}(-3/2)^n u[n].$$

5(b): $\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}$

Tällöin $X_1(z)$:n sisältämä napa on suppenemisalueen sisäpuolella, joten $x_1[n]$ sama kuin edellä. $X_2(z)$:n sisältämä napa on suppenemisalueen ulkopuolella ja $x_2[n] = 0, n \geq 0$. Käyttämällä tehtävän 2 yhteydessä annettuja muunnospareja saadaan

$$x_2[n] = \frac{5}{6}(-3/2)^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ \frac{5}{6}(-3/2)^n, & n \leq -1 \end{cases}.$$

5(c): $|z| < \frac{1}{2}$

Tällöin myös $X_1(z)$:n sisältämä napa on suppenemisalueen ulkopuolella.
 $x_1[n]$:ksi saadaan

$$x_1[n] = \frac{1}{2}(1/2)^n u(-n-1) = \begin{cases} 0, & n \geq 0 \\ (1/2)^{n+1}, & n \leq -1 \end{cases}.$$

$x_2[n]$ on sama kuin (b)-kohdassa.

Tehtävä 6: Etsi jono $x[n]$, jonka z -muunnos on

- (a) $X(z) = 1, |z| > 0$
- (b) $X(z) = z^3, |z| < \infty$
- (c) $X(z) = e^{z^{-1}} \quad z \neq 0$
- (d) $X(z) = \arctan z^{-1}, |z| > 1$
- (e) $X(z) = -2z^{-2} + 1 + 2z, 0 < |z| < \infty.$

6(a):

$$X(z) = 1, |z| > 0$$

$$x[n] = \delta[n].$$

6(b):

$$X(z) = z^3, |z| < \infty$$

$$x[n] = \delta[n+3].$$

6(c):

$$X(z) = e^{z^{-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad z \neq 0$$

$$x[n] = \frac{1}{n!}u[n].$$

6(d):

$$\begin{aligned} X(z) &= \arctan z^{-1} = z^{-1} - \frac{z^{-3}}{3} + \frac{z^{-5}}{5} - \frac{z^{-7}}{7} \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1} z^{-(2k+1)}, \quad |z| > 1 \\ x[n] &= \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{1}{n}, & n > 0 \text{ ja } n \text{ pariton} \\ 0, & n \leq 0 \text{ tai } n \text{ parillinen.} \end{cases} \end{aligned}$$

6(e):

$$\begin{aligned} X(z) &= -2z^{-2} + 1 + 2z, \quad 0 < |z| < \infty \\ x[n] &= -2\delta[n-2] + \delta[n] + \delta[n-1]. \end{aligned}$$

Tehtävä 7: Kausaalisen järjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1 - z^{-2}}{1 + (3/4)^2 z^{-2}}.$$

Mitkä ovat järjestelmän yksikkönäyte- ja alkelvasteet?

Käytetään hyväksi luennoilla esitettyä muunnosparia

$$r^n \cos(n\alpha + \beta)u[n] \iff \frac{\cos \beta - r \cos(\alpha + \beta)z^{-1}}{1 - 2r \cos \omega_0 z^{-1} + r^2 z^{-2}}, \quad |z| > |r|.$$

Sijoittamalla $\alpha = \pi/2$, $\beta = 0$ ja $r = 3/4$, päädytään muunnospariin:

$$(3/4)^n \cos(n\frac{\pi}{2})u[n] \iff \frac{1}{1 + (3/4)^2 z^{-2}}.$$

Käsiteltävän järjestelmän siirtofunktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$H(z) = \frac{1}{1 + (3/4)^2 z^{-2}} - \frac{z^{-2}}{1 + (3/4)^2 z^{-2}}.$$

Hyödyntämällä z -muunnoksen ominaisuutta $Z(x(n+k)) = z^k X(z)$ saadaan

$$h[n] = (3/4)^n \cos(n\frac{\pi}{2})u[n] - (3/4)^{(n-2)} \cos((n-2)\frac{\pi}{2})u[n-2].$$

Yksikköaskelvasteen z -muunnos on

$$\begin{aligned} Y(z) &= H(z) \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-2}}{(1+(3/4)^2 z^{-2})(1-z^{-1})} \\ &= \frac{(1-z^{-1})(1+z^{-1})}{(1+(3/4)^2 z^{-2})(1-z^{-1})} = \frac{1+z^{-1}}{1+(3/4)^2 z^{-2}}. \end{aligned}$$

Vastaavalla tavalla kuin yksikkönäytevasteen johdon yhteydessä saadaan yksikköaskelvasteeksi

$$y[n] = (3/4)^n \cos(n\frac{\pi}{2})u[n] + (3/4)^{(n-1)} \cos((n-1)\frac{\pi}{2})u[n-1].$$

Tehtävä 8: Kolmannen asteen suodattimen siirtofunktio on

$$H(z) = 0.039941 \frac{(1+z^{-1})(1+0.263251z^{-1}+z^{-2})}{(1-0.643448z^{-1})(1-1.216274z^{-1}+0.723330z^{-2})}.$$

- (a) Toteuta suodatin kaskadirakenteena, jossa on yksi ensimmäisen asteen lohko ja yksi toisen asteen lohko.
- (b) Toteuta suodatin rinnakkaisella rakenteella.

8(a): Kyseessä on kolmannen asteen elliptisen suodattimen siirtofunktio, jonka amplitudivaste $|H(e^{j\omega})|$ on esitetty lineaarisena ja desibeleissä ($20 \cdot \log_{10}|H(e^{j\omega})|$) kuvassa 5. Myös monet muut suodattimen toimintaa kuvaavat vasteet on annettu samassa kuvassa. Suodattimen päästökaista on $0 \leq \omega \leq \pi/4$. Tällä kaistalla $|H(e^{j\omega})|$ vaihtelee arvojen 1 ja 0.89125 (desibeleissä arvojen 0 dB ja -1 dB välillä). Suodatin siis päästää kaistalla

$0 \leq \omega \leq \pi/4$ majailevat taajuuskomponentit lävitseen. Jos sisäänmenona on signaalin $x[n] = \alpha \cos(\omega_0 n + \theta)$, missä $\omega_0 \leq \pi/4$, niin ulostuloksi saadaan $y[n] = k\alpha \cos[\omega_0 + \theta + \phi(\omega_0)]$, missä $\phi(\omega_0)$ on vaihevasteen arvo taajuudella $\omega = \omega_0$ ja k on arvojen 1 ja 0.89125 välillä. Suodattimen estokaista on $\pi/2 \leq \omega \leq \pi$. Tällä kaistalla amplitudivasteen arvo on korkeintaan 10^{-2} (-40 dB), joten sinisignaali, jonka taajuus sattuu estokaistalle, vaimenee ainakin sadanteen osaansa. Suodattimella on äärettömän suuri vaimennus taajuuksilla $\omega = 0.542020\pi$ ja $\omega = \pi$ (suodattimen nollat ovat yksikköpyrällä pisteissä $z = e^{\pm j0.542020\pi}$ ja $z = -1 = e^{j\pi}$). Jos sinisignaalin taajuus ω_0 on juuri 0.542020π tai π , se vaimenee täysin. Suodattimen navat ovat pisteissä

$$z = 0.643448$$

$$z = 0.850488e^{\pm j0.246406\pi}.$$

Navat on kätevää esittää napakordinaateissa, koska tällöin nähdään suoraan se, onko suodatin stabiili. Stabiilisuus edellyttää, että jokaisen navan itseisarvo on pienempi kuin yksi. Samalla nähdään navan kulma.

Sitten mennään itse tehtävään. Suodattimen siirtofunktio voidaan paloitella seuraavasti

$$H(z) = KH_1(z)H_2(z)$$

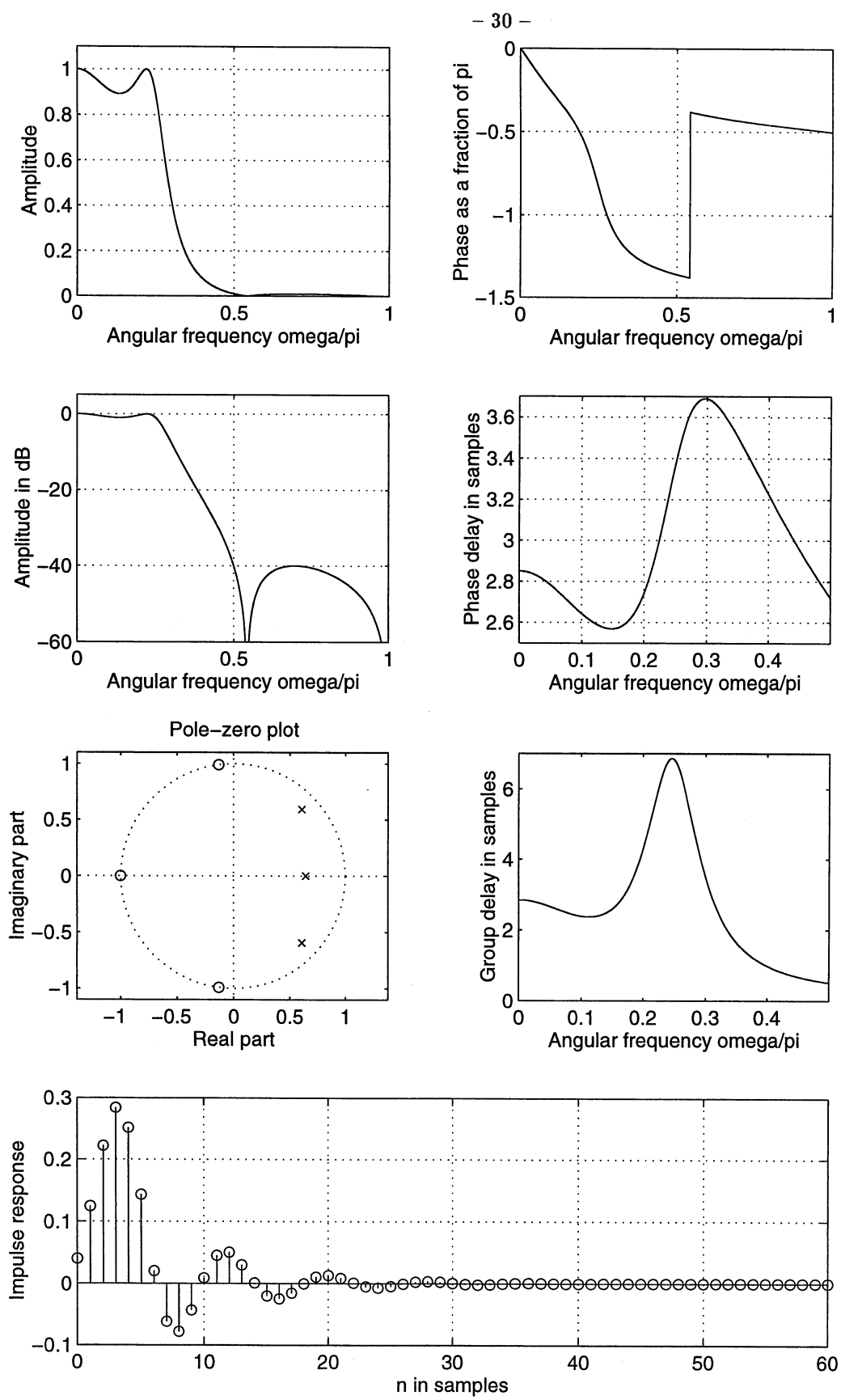
$$K = 0.039941$$

$$H_1(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - 0.643448z^{-1}}$$

$$H_2(z) = \frac{1 + 0.263251z^{-1} + z^{-2}}{1 - 1.216274z^{-1} + 0.723330z^{-2}}.$$

Tulokseksi saatava kaskadimuotoinen toteutus on esitetty kuvassa 6, jossa

$$K = 0.039941$$



Kuva 5. Tehtävän 8 suodattimen vasteet.

$$\alpha_{11} = 0.643448$$

$$\alpha_{12} = 1.216274, \quad \alpha_{22} = -0.723330$$

$$\beta_{12} = 0.263251.$$

Verrattaessa siirtofunktiota ja suodattimen toteutusta on huomattava se, että toteutuksessa takaisinkytkentäsilrukoiden kertoimet saadaan suodattimen nimittäjäpolynomin kertoimista vaihtamalla niiden **merkki**.

8(b): Kirjoitetaan siirtofunktio ensin suoraan muotoon:

$$H(z) = \frac{O(z)}{N(z)} = \frac{0.039941 + 0.050455z^{-1} + 0.050455z^{-2} + 0.039941z^{-3}}{1 - 1.859723z^{-1} + 1.505940z^{-2} - 0.465425z^{-3}}. \quad (A)$$

Haluttu realisaatio saadaan esittämällä $H(z)$ seuraavassa muodossa

$$H(z) = \gamma_0 + \frac{\gamma_{01}}{1 - 0.643448z^{-1}} + \frac{\gamma_{02} + \gamma_{12}z^{-1}}{1 - 1.216274z^{-1} + 0.723330z^{-2}},$$

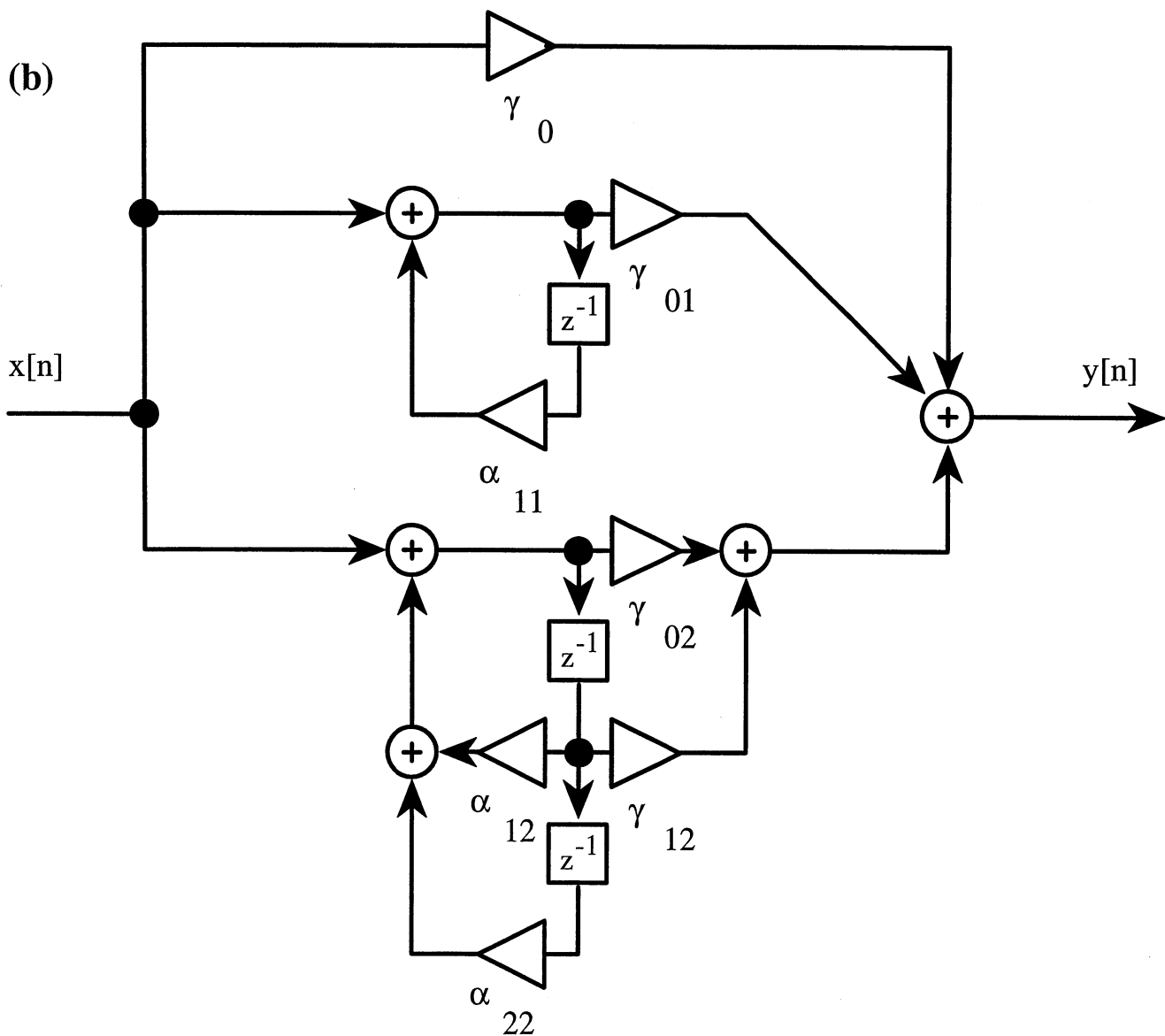
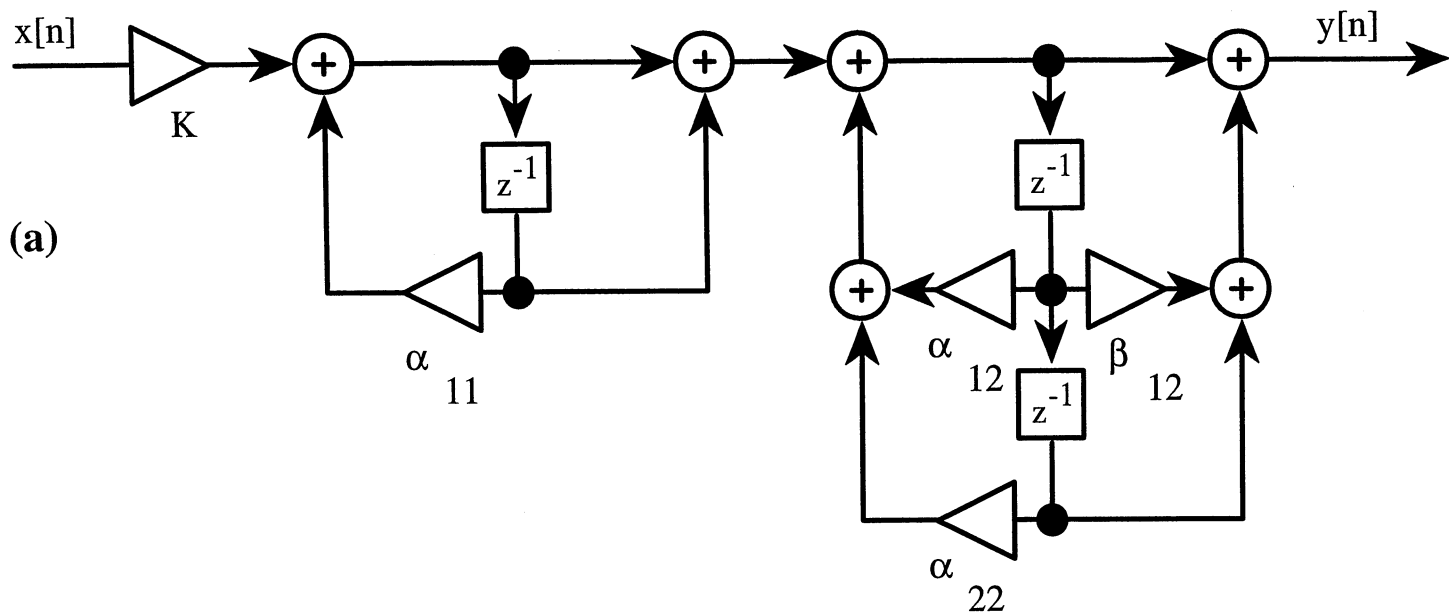
missä toinen termi sisältää suodattimen reaalisen navan ja kolmas kompleksisen napaparin.

Tuntemattomat γ :t voidaan ratkaista kätevästi esittämällä tämä lauseke suorassa muodossa. Osoittajaksi saadaan

$$O(z) = \gamma_0 N(z) + \gamma_{01}(1 - 1.216274z^{-1} + 0.723326z^{-2}) \\ + (\gamma_{02} + \gamma_{12}z^{-1})(1 - 0.643448z^{-1}).$$

Tuntemattomat voidaan ratkaista asettamalla ylläolevan lausekkeen vakio ja z^{-1} :n, z^{-2} :n ja z^{-3} :n kertoimet yhtäsuuriksi yhtälön (A) osoittajan vastaavien kertoimien kanssa. Tulokseksi saadaan yhtälöryhmä, jossa on neljä yhtälöä ja neljä tuntematonta. Tällaista yhtälöryhmää ei ole järkevää lähteä ratkaisemaan kynällä ja paperilla, koska tietokonekin on keksitty. Kokonaistoteutus on esitetty edellisen sivun kuvassa, jossa α :t ovat samat kuin (a)-kohdan α :t ja

$$\gamma_0 = -0.085815,$$



Kuva 6. Tehtävän 8 siirtofunktion (a) kaskadimuotoinen ja (b) rinnakkaismuotoinen toteutus.

$$\gamma_{01} = 0.455339,$$

$$\gamma_{02} = -0.329583, \quad \gamma_{12} = 0.232610.$$

Tehtävä 9: Toisen asteen suodattimen siirtofunktio on

$$H(z) = K \frac{1 + z^{-2}}{1 + 0.81z^{-2}}$$

- a) Määrää K siten, että suodattimen amplitudivaste on 1 nollataajuudella.
- b) Piirrä suodattimen nolla-napakuvio ja tämän avulla suodattimen amplitudi- ja vaihevasteet.

9(a): Suodattimen amplitudivasteen arvo nollataajuudella on $H(1)$ ($z = e^{j0} = 1$). Tästä saadaan

$$H(1) = K \frac{1 + 1}{1 + 0.81 \cdot 1} = 1$$

\Rightarrow

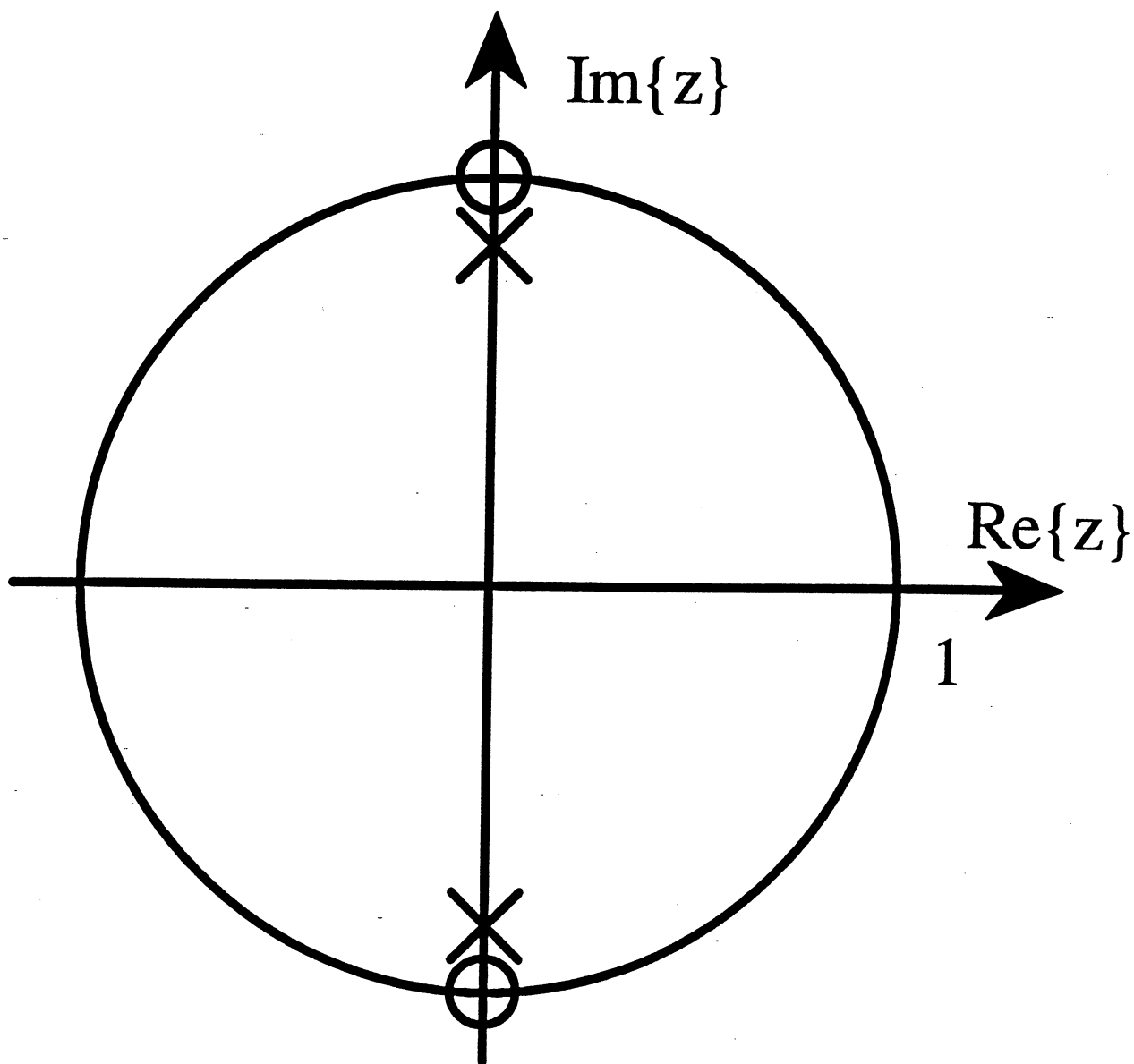
$$K = 0.905.$$

9(b): Suodattimen nollat saadaan määrättyksi asettamalla osoittajapolynomi nolllaksi. Nollat sijaisevat pisteissä (katso kuva 7)

$$z_{ze1}, z_{ze2} = \pm j = e^{\pm j\pi/2}.$$

Navat taas voidaan määrätä asettamalla nimittäjäpolynomi nolllaksi. Navat sijaisevat pisteissä

$$z_{po1}, z_{po2} = \pm j0.9 = 0.9e^{\pm j\pi/2}.$$



Kuva 7. Tehtävän 9 siirtofunktion napa-nollakuviio.

Suodattimen amplitudivaste (katso kuva 8) voidaan esittää muodossa

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{K l_1(\omega) l_2(\omega)}{k_1(\omega) k_2(\omega)},$$

missä

$$l_1(\omega) = |e^{j\omega} - z_{ze1}|$$

$$l_2(\omega) = |e^{j\omega} - z_{ze2}|$$

$$k_1(\omega) = |e^{j\omega} - z_{po1}|$$

$$k_2(\omega) = |e^{j\omega} - z_{po2}|.$$

$l_1(\omega)$ ja $l_2(\omega)$ ovat yksikköympyrän pisteen $e^{j\omega}$ etäisyydet nolista z_{ze1} ja z_{ze2} .
 $k_1(\omega)$ ja $k_2(\omega)$ ovat yksikköympyrän pisteen $e^{j\omega}$ etäisyydet navoista $z = z_{pe1}$ ja $z = z_{pe2}$. Nämä etäisyydet voidaan esittää seuraavissa muodoissa:

$$l_1(\omega) = |\cos \omega + j \sin \omega - j| = |\cos \omega + j(\sin \omega - 1)| = \sqrt{(\cos \omega)^2 + (\sin \omega - 1)^2}$$

$$l_2(\omega) = \sqrt{(\cos \omega)^2 + (\sin \omega + 1)^2}$$

$$k_1(\omega) = \sqrt{(\cos \omega)^2 + (\sin \omega - 0.9)^2}$$

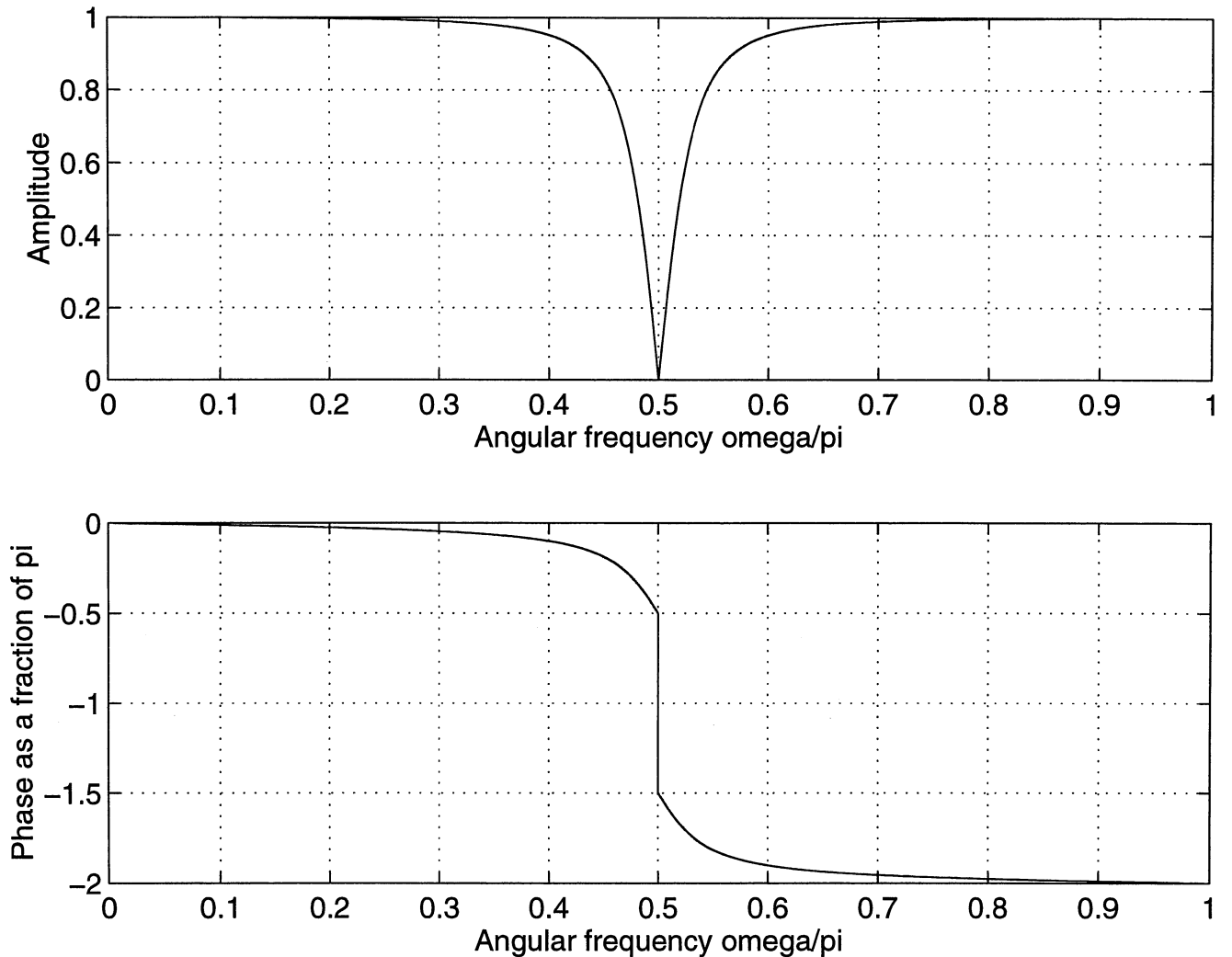
$$k_2(\omega) = \sqrt{(\cos \omega)^2 + (\sin \omega + 0.9)^2}.$$

Suodattimen vaihevaste puolestaan voidaan esittää muodossa

$$\phi(\omega) = \angle(e^{j\omega} - z_{ze1}) + \angle(e^{j\omega} - z_{ze2}) - \angle(e^{j\omega} - z_{po1}) - \angle(e^{j\omega} - z_{po2}).$$

Ylläolevassa yhtälössä $\angle(x)$ merkitsee x :n kulmaa. $\phi(\omega)$ voidaan esittää muodossa (katso kuva 8)

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\sin \omega - 1}{\cos \omega} + \arctan \frac{\sin \omega + 1}{\cos \omega}$$

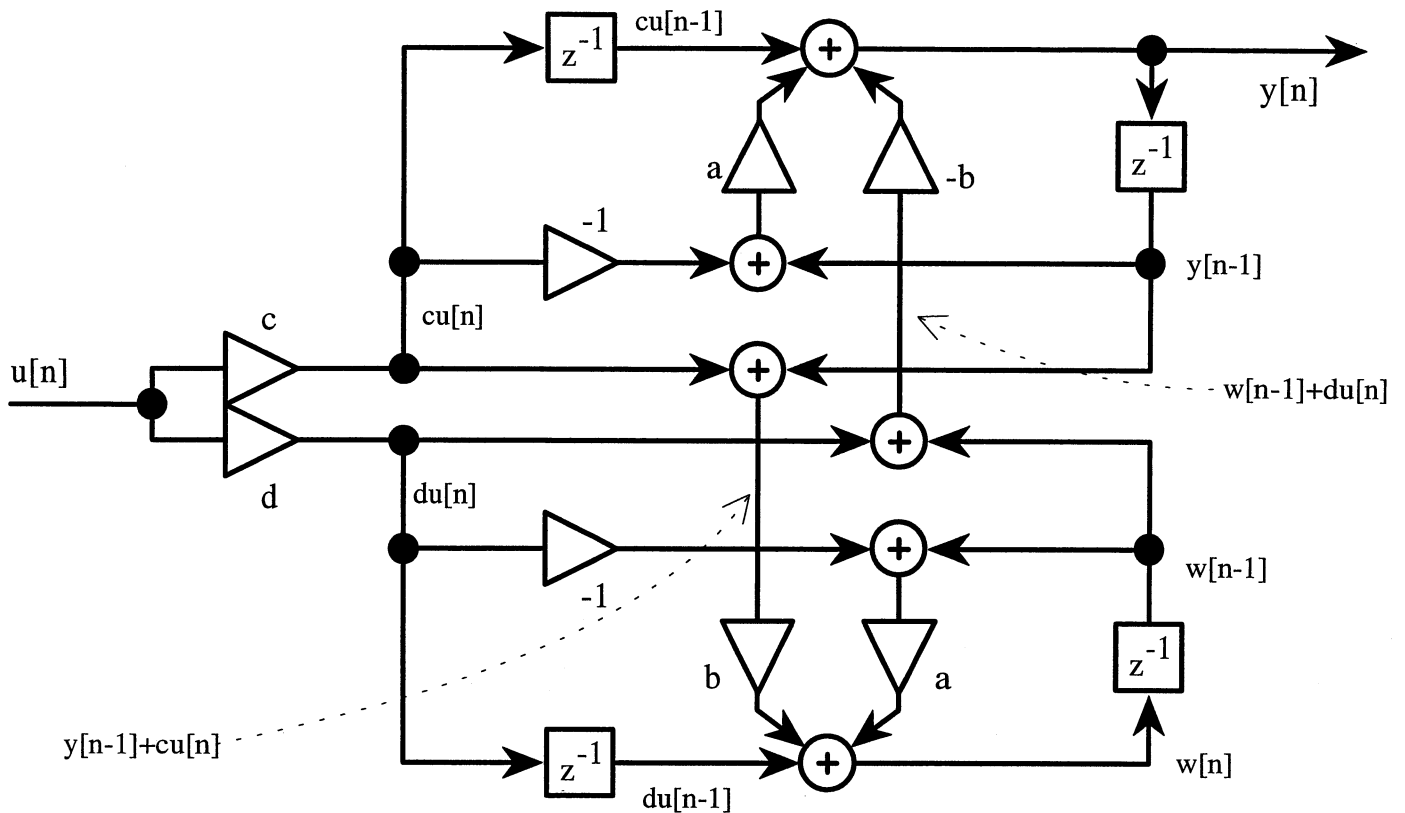


Kuva 8. Tehtävän 9 siirtofunktion amplitudi- ja vaihevasteet.

$$-\arctan \frac{\sin \omega - 0.9}{\cos \omega} - \arctan \frac{\sin \omega + 0.9}{\cos \omega}.$$

Tehtävä 10: Tarkastellaan kuvan 9 lohkokaaaviota. Mikä on järjestelmän siirtofunktio?

Otetaan kuvassa 9 käyttöön apumuuttuja $w[n]$ merkitsemään alemman haaran takaisinkytkentäsilman viiveen sisäänmenon arvoa. Viiveen ulostu-



Kuva 9. Tehtävän 10 suodattimen lohkokaavio.

lon arvo on siten $w[n - 1]$. Ylemmän haaran takaisinkytkentäsilmukan sisäänmeno on suoraan kokonaisulostulo $y[n]$. Ulostulo on $y[n - 1]$ kuten kuvassa on esitetty. Muita apumuuttujia ei välttämättä tarvita. Perusohjeena lohkokaaavion siirtofunktion määrittämisessä on ensin asettaa apumuuttujat takaisinkytkentäsilmukoiden viiveiden sisäänmenoon. Muita muuttujia ei välttämättä tarvita. Esimekiksi yllä olevan kuvan ylemmän vasemmanpuoleisen viiveen ulostulo on suoraan $cu[n - 1]$ ja alemman viiveen ulostulo on $du[n - 1]$.

Kuvan merkinnöin voidaan kirjoittaa seuraavat yhtälöt:

$$y[n] = cu[n - 1] + a(y[n - 1] - cu[n]) - b(w[n - 1] + du[n])$$

$$w[n] = du[n-1] + a(w[n-1] - du[n]) + b(y[n-1] + cu[n]).$$

Nämä yhtälöt voidaan kirjoittaa muotoon

$$y[n] - ay[n-1] = -bw[n-1] + cu[n-1] - (ac + bd)u[n]$$

$$w[n] - aw[n-1] = by[n-1] + du[n-1] + (bc - ad)u[n].$$

Ottamalla z -muunnos ylläolevien yhtälöiden molemmista puolista saadaan

$$(1 - az^{-1})Y(z) = -bz^{-1}W(z) + (-(ac + bd) + cz^{-1})U(z)$$

$$(1 - az^{-1})W(z) = bz^{-1}Y(z) + ((bc - ad) + dz^{-1})U(z).$$

Ratkaisemalla $W(z)$ toisesta yhtälöstä saadaan

$$W(z) = \frac{bz^{-1}Y(z) + ((bc - ad) + dz^{-1})U(z)}{1 - az^{-1}}.$$

Sijoittamalla $W(z)$ ensimmäiseen yhtälöön tulee $Y(z)$:n ja $U(z)$:n väliseksi yhteydeksi

$$(1 - az^{-1})Y(z) = \frac{-b^2z^{-2}Y(z)}{1 - az^{-1}} + \frac{[-bz^{-1}((bc - ad) + dz^{-1}) + (1 - az^{-1})(-(ac + bd) + cz^{-1})]U(z)}{1 - az^{-1}}.$$

Haluttu siirtofunktio on täten

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{-(ac + bd)(1 + z^{-2}) + [c(-b^2 + a^2 + 1) + 2abd]}{1 - 2az^{-1} + (a^2 + b^2)z^{-2}}.$$

Tehtävä 11: Kuvassa 10 on digitaalinen järjestelmä A, jolla on kaksi sisäänmenoa $x_1[n]$ ja $x_2[n]$ ja kaksi ulostuloa $y_1[n]$ ja $y_2[n]$. Järjestelmää voidaan kuvata yhtälöillä

$$Y_1(z) = H_1(z)X_1(z) + H_2(z)X_2(z)$$

$$Y_2(z) = H_3(z)X_1(z) + H_4(z)X_2(z)$$

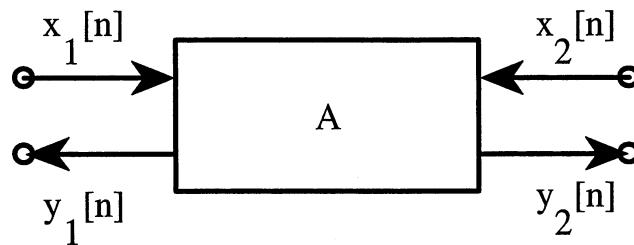
missä

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_2(z) = 1$$

$$H_3(z) = \frac{1 + 2z^{-1}}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$H_4(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}.$$



Kuva 10. Tehtävän 11 digitaalinen järjestelmä.

Piirrä mahdollisimman yksinkertainen järjestelmää vastaava lohkokaavio.

Tehtävässä esitettyjen kaavojen perusteella voidaan kirjoittaa

$$Y_1(z) = W_1(z) + X_2(z), \quad W_1(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}X_1(z)$$

$$Y_2(z) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}z^{-1}}W_2(z), \quad W_2(z) = (1 + 2z^{-1})X_1(z) + X_2(z).$$

Tästä saadaan päättelemällä

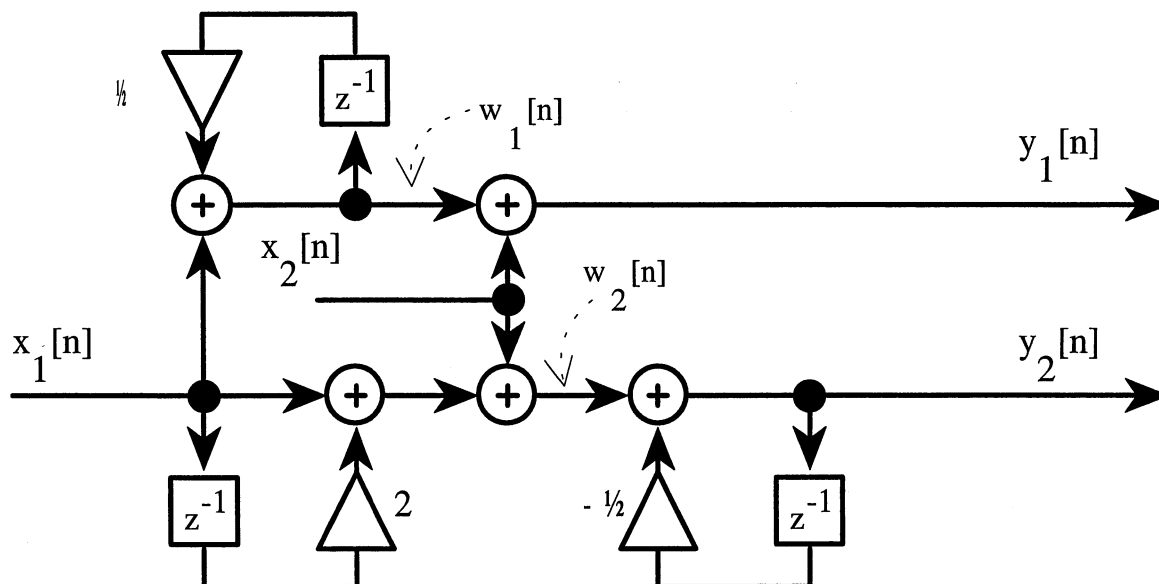
$$y_1[n] = w_1[n] + x_2[n]$$

$$y_2[n] = -\frac{1}{2}y_2[n - 1] + w_2[n]$$

$$w_1[n] = \frac{1}{2}w_1[n - 1] + x_1[n]$$

$$w_2[n] = x_1[n] + 2x_1[n-1] + x_2[n].$$

Järjestelmää vastaava yksinkertainen lohkokaavio on esitetty kuvassa 11.



Kuva 11. Tehtävän 11 järjestelmän lohkokaavio.

Tehtävä 12: Tarkastellaan analogista RC-suodatinta, jonka impulssivaste on

$$h_a(t) = \begin{cases} ae^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

- Mikä on suodattimen taajuusvaste?
- Jos diskreettiaikaisen suodattimen impulssivaste on

$$h_d[n] = h_a[nT],$$

niin mitkä ovat tulokseksi saatavan suodattimen siirtofunktio ja taajuusvaste?

12(a):

$$h_a(t) = ae^{-at}u(t) \Rightarrow H_a(s) = \frac{a}{s+a}$$

$$\Rightarrow H_a(j\Omega) = \frac{1}{j\Omega + a} = |H_a(j\Omega)|e^{j\phi_a(\Omega)},$$

missä

$$|H_a(j\Omega)| = \frac{a}{\sqrt{\Omega^2 + a^2}}$$

ja

$$\phi_a(\Omega) = \arctan \frac{\Omega}{a}.$$

Näissä yhtälöissä $\Omega = 2\pi f$, missä f on 'todellinen' taajuus.

12(b):

$$h_d[n] = h_a[nT] = ae^{-anT}u[n] = a(e^{-aT})^n u[n]$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{a}{1 - e^{-aT}z^{-1}}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{a}{1 - e^{-aT}e^{-j\omega}} = \frac{ae^{j\omega}}{e^{j\omega} - e^{-aT}} = |H(e^{j\omega})|e^{j\phi(\omega)},$$

missä

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{a}{\sqrt{(\cos \omega - e^{-aT})^2 + \sin^2 \omega}}$$

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega} - \arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega - e^{-aT}}$$

$$= \omega - \arctan \frac{\sin \omega}{\cos \omega - e^{-aT}}.$$

Koska diskreettiaikainen suodattimen impulssivaste on luotu ottamalla näytteitä jatkuva-aikaisen suodattimen impulssivasteesta, tällaista tapaa luoda

diskreettiaikainen suodatin analogisesta kutsutaan 'impulssi-invariantiksi' suunnittelumenetelmäksi. Tätä ei kurssissamme kuitenkaan käsitellä yksityiskohtaisesti sen tiettyjen puutteiden vuoksi. Jos merkitsemme $\Omega = 2\pi f$ ja $\omega = 2\pi f/F_s$, $F_s = 1/T$, saadaan seuraava yhteys:

$$H(e^{j2\pi f/F_s}) = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_a(j2\pi[f + kF_s]).$$

Seuraavan sivun ensimmäisessä kuvassa on tarkasteltu analogista suodatinta, jossa $a = 4000\pi$, jolloin $|H_a(j2\pi f)|$ saa arvon $1/\sqrt{2}$ (3 desibelin vaimennus) kun $f = 1$ kHz. Toisessa kuvassa on vastaavan digitaalisen suodattimen amplitudivaste, kun $F_s = 20$ kHz eli $T = 0.05$ ms. Amplitudivasteen arvo on jaettu luvulla 23305.8, jotta vaste saisi arvon 1 nollataajuudella. Havaitse laskostumisesta johtuva käyrien erilaisuus.

Tehtävä 13: 1 kHz:n puhtaasta sinisignaalista otetaan näytteitä mikrosekunnin välein. Millä muulla sinisignaalilla on samat näytearvot?

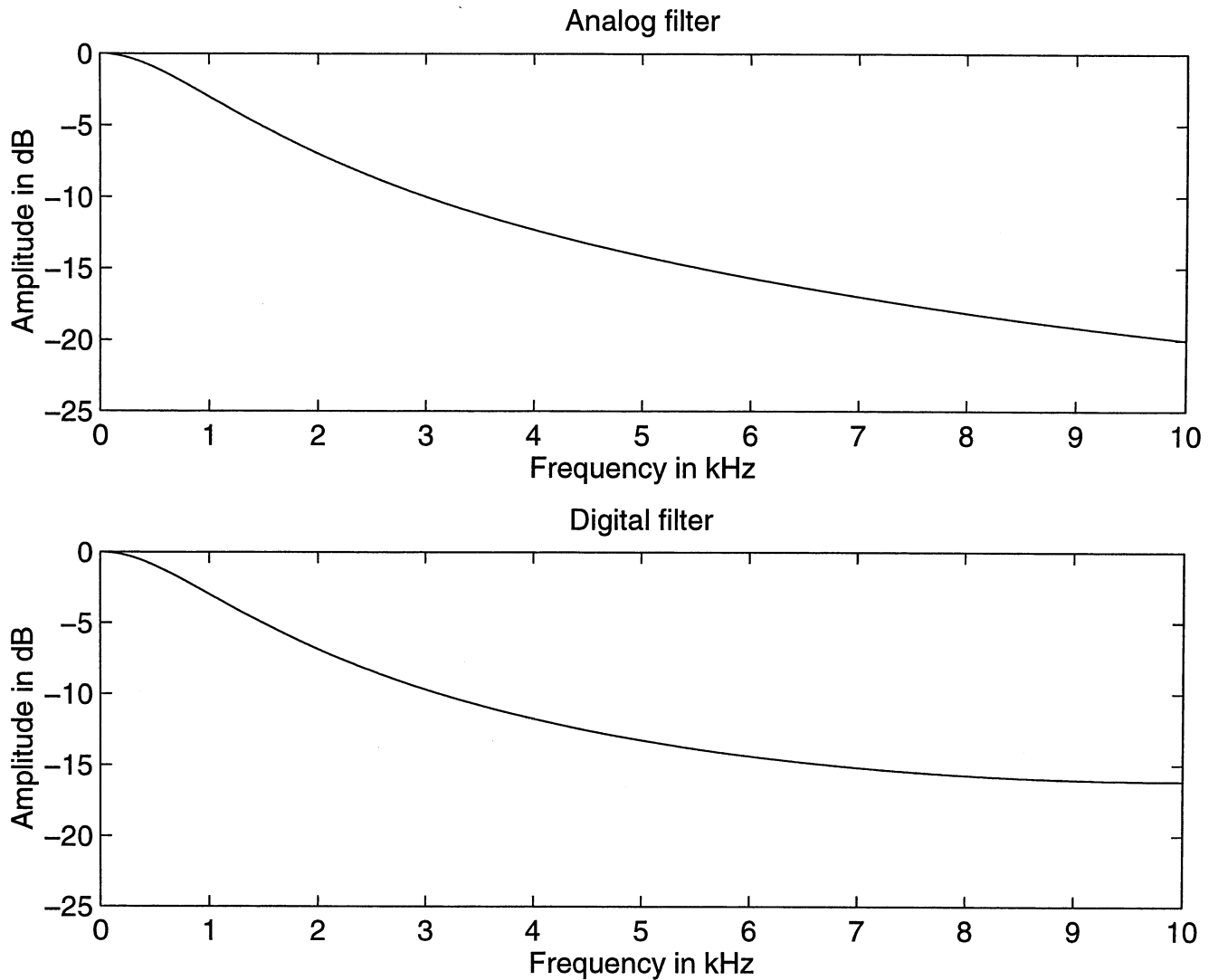
$$x_a(t) = \sin(2\pi F_s t), \quad F_s = 10^3 \text{ 1/s}$$

$$x[n] = \sin(2\pi F_s nT), \quad T = 10^{-6} \text{ 1/s}$$

$$\begin{aligned} \sin(2\pi[F_s + k/T]nT) &= \sin(2\pi F_s nT + nk \cdot 2\pi) \\ &= \sin(2\pi F_s nT) \quad \forall k \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

\Rightarrow Puhtailla sinisignaaleilla, joiden taajuudet ovat $F_s + k/T$, $k \in \mathbf{N}$ eli 1.001 MHz, 2.001 MHz, 3.001 MHz, ..., on samat näytearvot.

Löytyyköhän muita sinisignaaleja? ($\sin(k \cdot 2\pi - \alpha) = \sin \alpha \quad \forall k \in \mathbf{N}$.)

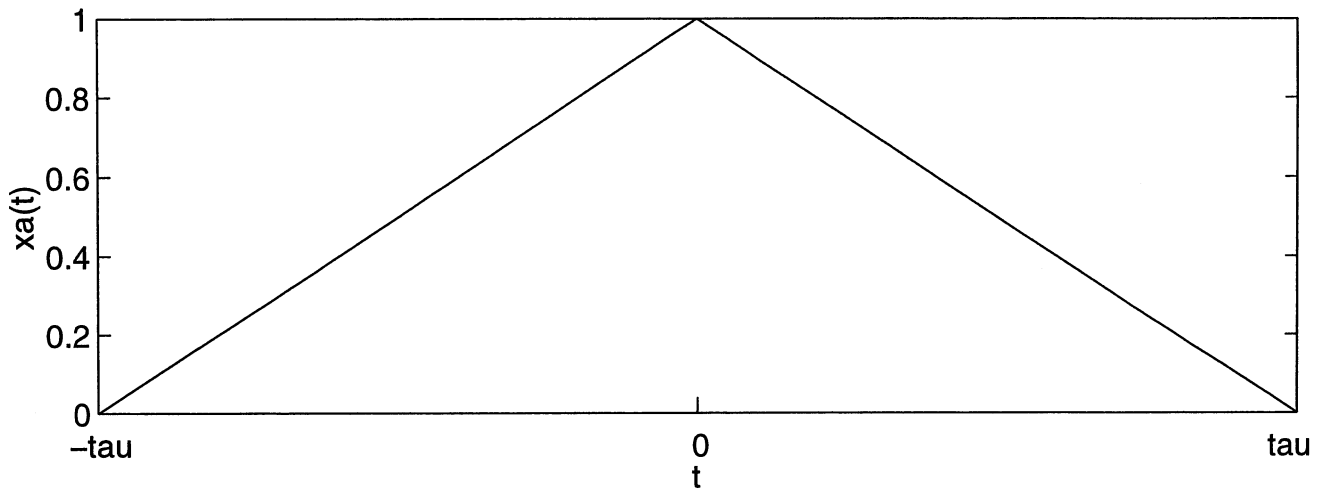


Kuva 12. Tehtävän 12 analogisen ja digitaalisen suodattimen amplitudivasteet.

Tehtävä 14: Symmetrisestä kolmiopulssista, jonka leveys on 10 ms (katso kuva 13), otetaan näytteitä, kun $t = nT$.

(a) Piirrä analoginen spektri $X_a(j2\pi f)$ ja digitaalinen spektri $X(e^{j\omega})$, $\omega = 2\pi fT = 2\pi f/F_s$, kun $T = 2$ ms ja $T = 0.5$ ms eli $F_s = 500$ Hz ja $F_s = 2000$ Hz.

(b) Määrä T siten, että $x(t)$:n energiasta 1% on taajuusvälin $|f| \leq 1/(2T) =$



Kuva 13. Symmetrinen kolmiopulssi. $\tau = 5$ ms.

$F_s/2$ ulkopuolella.

14(a):

$$x_a(t) = \begin{cases} 1 - |t|/\tau, & |t| \leq \tau \\ 0, & |t| > \tau \end{cases}, \quad \tau = 5 \text{ ms}$$

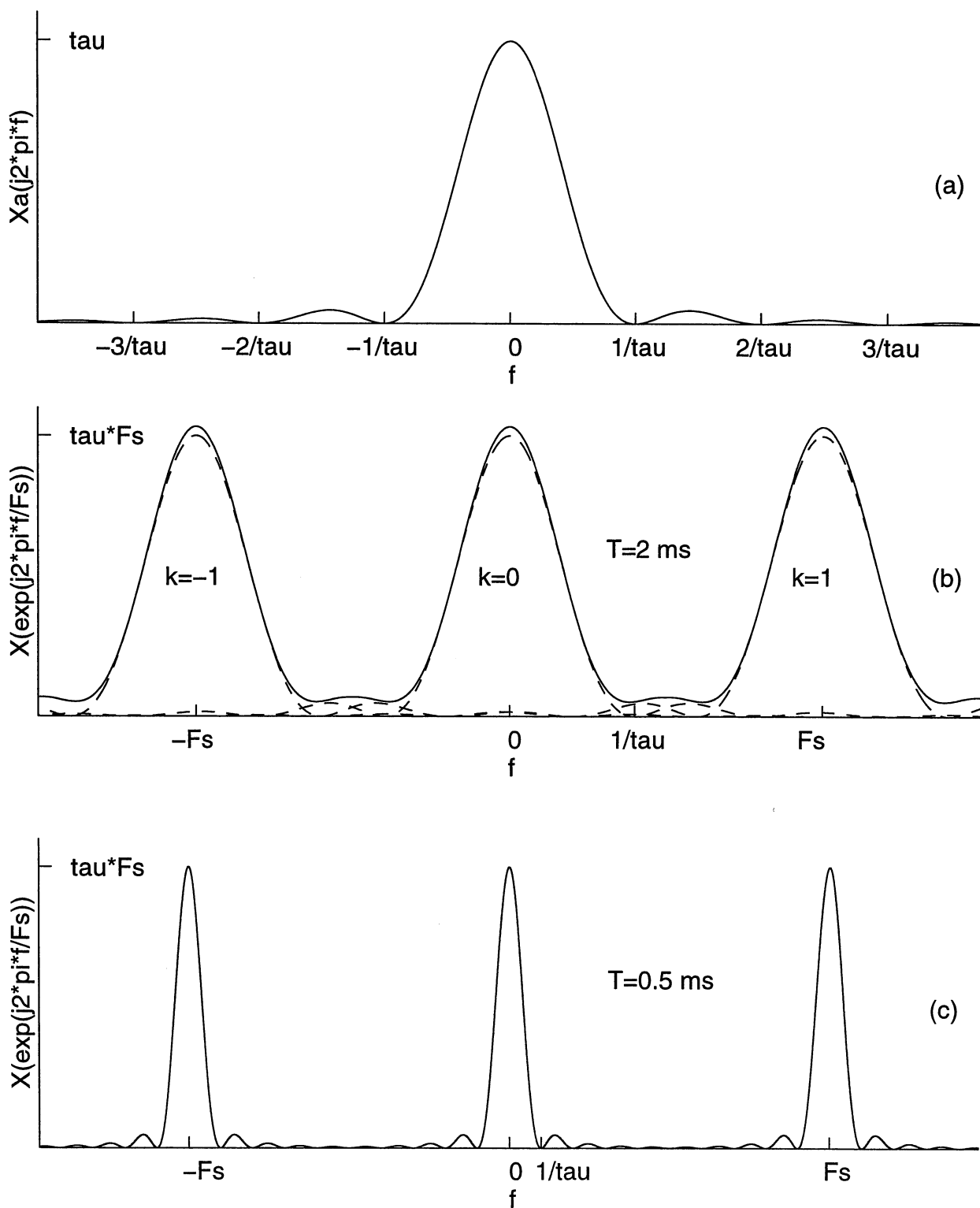
Tämän signaalin Fourier-muunnos on (löytyy oppikirjoista)

$$X_a(j2\pi f) = \tau \frac{\sin^2(\pi\tau f)}{(\pi\tau f)^2} = \tau \text{sinc}^2(\tau f).$$

Jonon $x[n] = x_a[nT]$ digitaalinen spektri on puolestaan ($\omega = 2\pi f/F_s$)

$$\begin{aligned} X(e^{j2\pi f/F_s}) &= X(z) \Big|_{z = e^{j2\pi f/F_s}} = F_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(2\pi[f + kF_s])/F_s) \\ &= F_s \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2\left(\tau \cdot 2\pi(f + kF_s)\right). \end{aligned}$$

Kuvassa 14(a) on annettu analoginen spektri $X_a(j2\pi f)$ ja kuvassa 14(b) digitaalinen spektri, kun näytteenottoväli $T = 2$ ms. Kuvassa 14(b) katkoviivoilla piirretyt käyrät ovat edellä esitetyn $X(e^{j2\pi f/F_s})$:n lausekkeen termit k :n ar-



Kuva 14. Kolmiopulssin ja sen sen näytteistettyjen signaalien spektrit.

voilla $k = -1$, $k = 0$, ja $k = 1$. Kuten kuvasta havaitaan nämä termit menevät hieman päällekkäin. Tämä merkitsee, että vähäistä laskostumista tapahtuu näytteenoton yhteydessä kun $T = 2$ ms ($F_s = 500$ Hz). Kuvassa 14(b) $X(e^{j2\pi f/F_s})$:n kokonaisvaste on piirretty yhtenäisellä viivalla. Kun $T = 0.5$ ms ($F_s = 2000$ Hz), laskostuminen on merkityksetön (kuva 14(c)).

14(b): Parsevalin teoreeman perusteella voidaan $x_a(t)$:n energia lausua seuraavassa muodossa

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} x_a^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X_a(j2\pi f)|^2 df = \int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \text{sinc}^4(\tau f) df$$

Taajuusvälillä $|f| \leq F_s/2$ oleva energia on

$$E' = \int_{-F_s/2}^{F_s/2} \tau^2 \text{sinc}^4(\tau f) df.$$

Ehdoksi $T = 1/F_s$:n määrittämiselle siis tulee

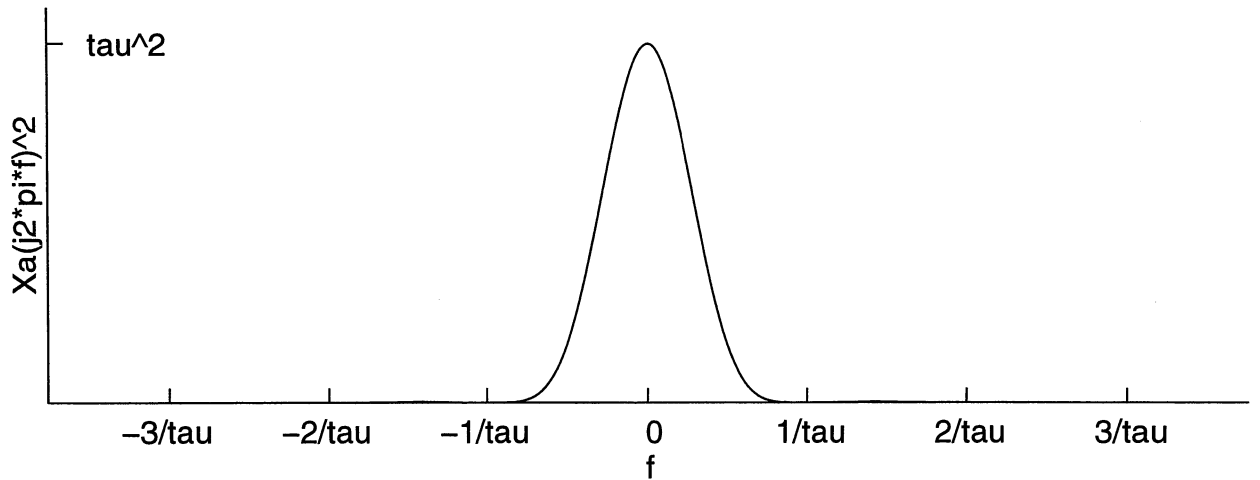
$$\frac{\int_{-F_s/2}^{F_s/2} \tau^2 \text{sinc}^4(\tau f) df}{\int_{-\infty}^{\infty} \tau^2 \text{sinc}^4(\tau f) df} \geq 0.99.$$

Yllä olevaa yhtälöä ei voida ratkaista suljetussa muodossa. Kuvassa 15 on esitetty $|X_a(j2\pi f)|^2$ f :n funktiona. Tästä kuvasta havaitaan, että $x_a(t)$:n energia on keskittynyt lähes yksinomaan välille $|f| < 1/\tau$.

$$\Rightarrow \frac{1}{\tau} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2T} \Rightarrow T = \frac{\tau}{2} = 2.5 \text{ ms.}$$

Tehtävä 15: Tarkastellaan analogisen signaalin suodatusta digitaalisella suodattimella.

- (a) Määrää ulostulon analogiaspektri $Y_a(j2\pi f)$, kun sisäänmenona on $x_a(t) = e^{-at}u(t)$, $H(z) = (1 + z^{-1})/2$ ja rekonstruktiosuodatin on ideaalinen alipäästösuodatin.



Kuva 15. Kolmipulssin spektrin neliö.

- (b) Määrää $Y_a(j2\pi f)$, kun sisäänmeno $x_a(t) = e^{-at}u(t)$ suodatetaan ennen näytteenottoa ideaalisella alipäästösuodattimella, jonka rajataajuus on $f_c = F_s/2$, $H(z) = (1 + z^{-1})/2$, ja rekonstruktiosuodatin on RC-suodatin, jonka impulssivaste on $g(t) = be^{-bt}u(t)$.
- (c) Määrää $Y_a(j2\pi f)$, kun sisäänmeno $x_a(t) = e^{-at}u(t)$ suodatetaan ennen näytteenottoa ideaalisella alipäästösuodattimella, jonka rajataajuus on $f_c = F_s/2$, $H(z) = (1 + z^{-1})/2$, ja rekonstruktiosuodatin on ideaalinen alipäästösuodatin.

Ulostulon analogiaspektri voidaan kirjoittaa muotoon

$$Y_a(j2\pi f) = F_s G(j2\pi f) H(e^{j2\pi f/F_s}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j2\pi[f + kF_s]),$$

missä $G(j2\pi f)$ on rekonstruktiosuodattimen taajuusvaste, $H(e^{j2\pi f/F_s})$ on digitaalisen suodattimen taajuusvaste, $X_a(j2\pi f)$ on sisäänmenon analogiaspektri ja F_s on näytteenottotaajuus.

15(a):

$$x_a(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow X_a(j2\pi f) = \frac{1}{j2\pi f + a}$$

$$H(e^{j2\pi f/F_s}) = (1 + e^{j2\pi f/F_s})/2$$

$$G(j2\pi f) = \begin{cases} 1, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_a(j2\pi f) = \begin{cases} F_s[(1 + e^{j2\pi f/F_s})/2] \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j2\pi(f + kF_s) + a}, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2. \end{cases}$$

15(b):

$$\hat{x}_a(t) = e^{-at}u(t) \Rightarrow \hat{X}_a(j2\pi f) = \frac{1}{j2\pi f + a}.$$

Koska sisäänmeno $\hat{x}_a(t)$ suodatetaan ideaalisella alipäästosuodattimella, jonka taajuusvaste on

$$F(j2\pi f) = \begin{cases} 1, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2, \end{cases}$$

saadan sisäänmenon tajuusvasteeksi

$$X_a(j2\pi f) = F(j2\pi f)\hat{X}_a(j2\pi f) = \begin{cases} \frac{1}{j2\pi f + a}, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2 \end{cases}$$

$$H(e^{j2\pi f/F_s}) = (1 + e^{j2\pi f/F_s})/2$$

$$g(t) = be^{-bt}u(t) \Rightarrow G(j2\pi f) = \frac{b}{j2\pi f + b}$$

$$\Rightarrow$$

$$Y_a(j2\pi f) = F_s[(1 + e^{j2\pi f/F_s})/2] \frac{b}{j2\pi f + b} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j2\pi[f + kF_s]).$$

Peruseroina (a)-kohdan ja (b)-kohdan välillä on se, että (b)-kohdassa ei tapahdu laskustumista eli termit $X_a(j2\pi[f + kF_s])$ eivät mene päällekkäin ja (a)-kohdassa $Y_a(j2\pi f)$ sisältää taajuuskomponentteja vain kun $|f| < F_s/2$.

15(c): Erona (b)-kohtaan on se, että nyt

$$G(j2\pi f) = \begin{cases} 1, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2 \end{cases}$$

eikä $G(j2\pi f) = b/j2\pi f + b$. Koska laskustumista ei tapahdu, saadaan

$$Y_a(j2\pi f) = \begin{cases} F_s[(1 + e^{j2\pi f/F_s})/2]\widehat{X}_a(j2\pi f), & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} F_s[(1 + e^{j2\pi f/F_s})/2]\frac{1}{j2\pi f + a}, & |f| < F_s/2 \\ 0, & |f| \geq F_s/2. \end{cases}$$

Tämä vastaa ideaalista tilannetta, jossa jatkuva-aikaista siisäänmenoa prosessoidaan vain kaistalla $|f| < F_s/2$ ja muut taajuuskomponentit ovat nolliä.

Tehtävä 16: Suunnittele digitaalinen Butterworth-suodatin, jonka päästökaistan rajataajuus on $\omega_p = 0.2\pi$, estokaistan alku on $\omega_s = 0.4\pi$, maksimivaimennus päästökaistalla on 3 dB ja minimivaimennus estokaistalla on 20 dB.

Rekursiivisen digitaalisen suodattimen vaatimukset esitetään usein seuraavassa muodossa:

$$-A_{max} \leq 20 \cdot \log_{10} |H(e^{j\omega})| \leq 0, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$20 \cdot \log_{10} |H(e^{j\omega})| \leq -A_{min}, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi,$$

missä A_{max} amplitudivasteen maksimivaihtelu päästökaistalla desibeleissä ja A_{min} on minimivaimennus estokaistalla. Vaihtoehtoisesti nämä vaatimukset

voidaan esittää amplitudivasteelle seuraavasti:

$$1 - \delta_p \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1, \quad 0 \leq |\omega| \leq \omega_p$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq \delta_s, \quad \omega_s \leq |\omega| \leq \pi,$$

missä

$$\delta_p = 1 - 10^{-A_{max}/20}$$

$$\delta_s = 10^{-A_{min}/20}.$$

Joissain tapauksissa halutaan amplitudivasteen olevan rajojen $1 \pm \delta_p$ välissä päästökaistalla. Kolmas vaihtoehto on antaa vaatimukset amplitudivasteen neliöfunktiolle $|H(e^{j\omega})|^2$.

Haluttu suodatin voidaan suunnitella bilineaarimuunnoksen avulla seuraavasti:

1. Valitaan bilineaarimuunnoksen

$$s = c \frac{z - 1}{z + 1}$$

kerroin c siten, että päästökaistan rajataajuus ω_p kuvautuu analogisen suodattimen taajuudeksi $\Omega_p = 1$. Haluttu c :n arvo on

$$c = \cot(\omega_p/2).$$

On syytä mainita se, että useimmissa oppikirjoissa käytetyissä bilineaarimuunnoksissa ei esiinny kyseitä vakiota.

2. Lasketaan analogisen suodattimen estokaistan alku Ω_s yhtälöstä

$$\Omega_s = c \tan(\omega_s/2).$$

3. Tästä saadaan seuraavat vaatimukset analogiselle suodattimelle $H_a(s)$:

$$-A_{max} \leq 20 \cdot \log_{10} |H_a(j\Omega)| \leq 0, \quad 0 \leq |\Omega| \leq 1$$

$$20 \cdot \log_{10} |H_a(j\Omega)| \leq -A_{min}, \quad \Omega_s \leq |\Omega| \leq \infty.$$

Kuvassa 12 on esitetty digitaalisen ja analogisen suodattimen välinen yhteys. Sijoittamalla $z = e^{j\omega}$ ja $s = j\Omega$ yhtälöön $s = c(z - 1)/(z + 1)$ saadaan ω :n ja Ω :n välille yhteys

$$\Omega = c \tan(\omega/2)$$

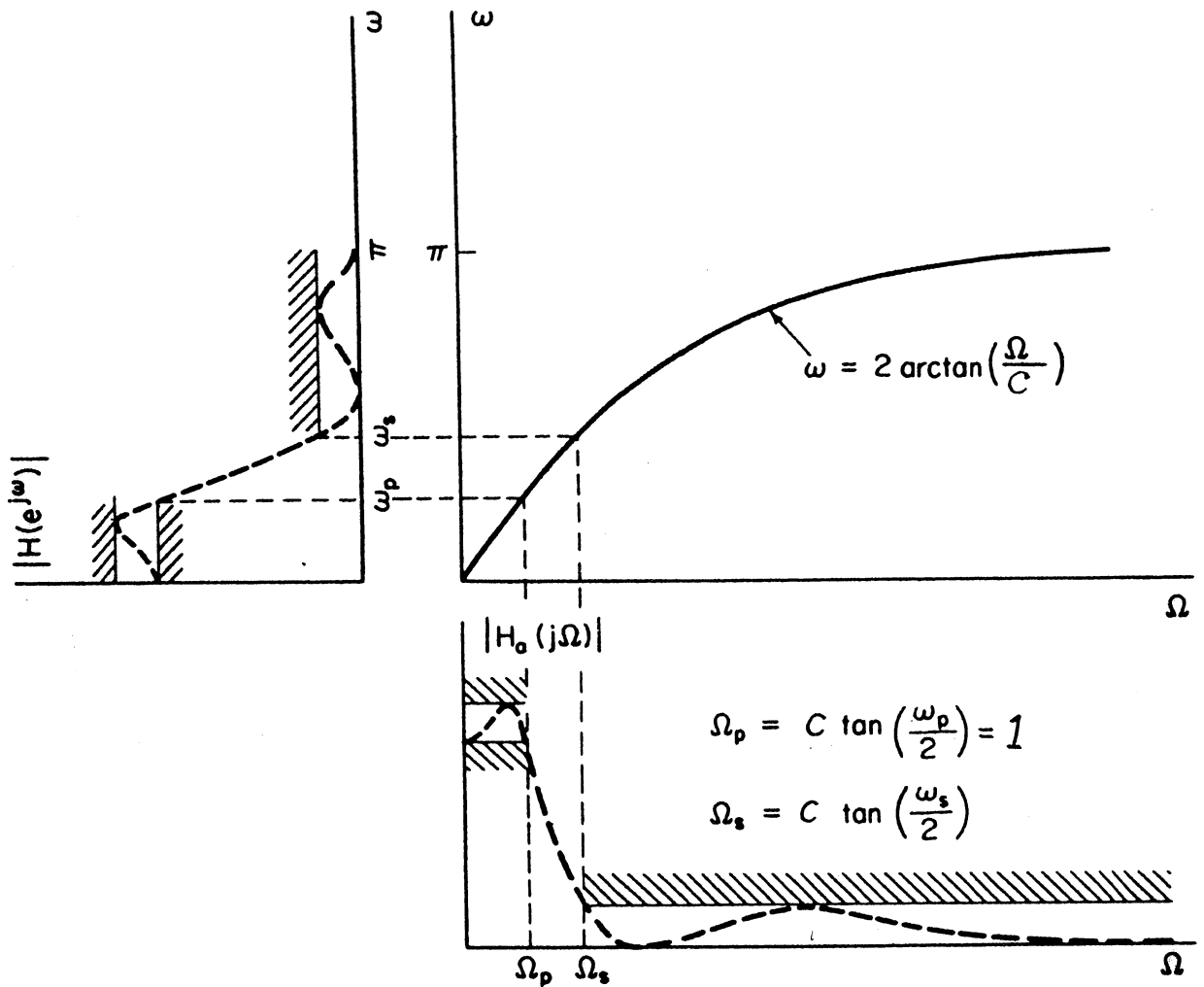
tai

$$\omega = 2 \arctan(\Omega/c).$$

Tässä vaiheessa analoginen suodatin voidaan sitten suunnitella. Ennen varsinaista suunnittelua täytyy tuntea suodatintyyppi. Klassisia suodattimia ovat:

- a) Butterworth (maksimaalisen laakalatvainen sekä päästö- että estokaistoilla)
- b) Chebyshev (tasa-aaltainen päästökaistalla ja maksimaalisen laakalatvainen estokaistalla)
- c) Käänteinen Chebyshev (maksimaalisen laakalatvainen päästökaistalla ja tasa-aaltainen estokaistalla)
- d) Elliptinen (Cauer) (tasa-aaltainen sekä päästö- että estokaistoilla)

Bilineaarimuunnoksen kerroin c on syytä valita edellä esitetyllä tavalla, koska analogisten suodattimien siirtofunktiot annetaan usein päästökaistan rajataajuudelle $\Omega_p = 1$. Kirjallisuudesta löytyy suoraan taulukoituina suodattimien siirtofunktioita juuri tälle rajataajuudelle. Lisäksi edellä mainituille



Kuva 16. Digitaalisen suodattimen suunnittelu bilineaarimuunnoksen avulla.

kolmelle ensimmäiselle suodatintyypille löytyy helpot lausekkeet napojen ja nollien määrittämiseksi. Elliptisen suodattimen suunnittelu on hiukan vaikeampaa, mikäli taulukoita ei ole käytettävissä. Kaikkein helpointa on suunnittelu silloin, kun on käytettävissä tietokoneohjelma suodattimen suunnittelemiseksi. On syytä mainita se, että yllämainitut klassiset suodattimet ovat harvoin parhaita mahdollisia. Parhaat suodattimet saadaan aikaan suoralla z -taso-suunnittelulla. Näitä suodattimia ei kuitenkaan käsitellä peruskurssissa. Tervetuloa jatkokurssille.

4. Viimeinen vaihe on muodostaa digitaalisen suodattimen siirtofunktio:

$$H(z) = H_a(s) \Big|_{s = c \frac{z-1}{z+1}} = H_a\left(c \frac{z-1}{z+1}\right).$$

Tulokseksi saatava suodatin täyttää automattisesti halutut ehdot, koska nämä ehdot on siirretty s -tasoon vaiheessa 3.

Analogisen Butterworth-suodattimen siirtofunktio on muotoa

$$H_a(s) = \frac{k_0}{B_N(s)},$$

missä $B_N(s)$ on N :nnen asteen polynomi, Sen itseisarvon neliölauseke voidaan kirjoittaa muotoon

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Omega^{2N}}.$$

Vakion ϵ^2 avulla voidaan muunnella suodattimen amplitudivasteen neliön arvoa rajataajuudella $\Omega_p = 1$. Tavallisesti tämä arvo annetaan desibeleissä positiivisena arvona

$$A_{max} = -20 \cdot \log_{10} |H_a(j1)| = -10 \cdot \log_{10} |H_a(j1)|^2.$$

Kun A_{max} on annettu, voidaan ϵ^2 laskea yhtälöstä

$$A_{max} = -10 \cdot \log_{10} \frac{1}{1 + \epsilon^2}$$

eli

$$\epsilon^2 = 10^{A_{max}/10} - 1.$$

Kun ϵ^2 tunnetaan, niin seuraava vaihe on määrätä suodattimen asteluku siten, että

$$20 \cdot \log_{10} |H_a(j\Omega_s)| = 10 \cdot \log_{10} |H_a(j\Omega_s)|^2 = 10 \cdot \log_{10} \frac{1}{1 + \epsilon^2 \Omega_s^{2N}} \leq -A_{min}.$$

$$\Rightarrow \log_{10}(1 + \epsilon^2 \Omega_s^{2N}) \geq \frac{A_{min}}{10}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \Omega_s^{2N} &\geq \frac{10^{0.1A_{min}} - 1}{\epsilon^2} \\ \Rightarrow N &\geq \frac{\log_{10}[(10^{0.1A_{min}} - 1)/\epsilon^2]}{2 \cdot \log_{10} \Omega_s}.\end{aligned}$$

Kun N on määrätty, suodattimen navat ovat ne yhtälön

$$1 + \epsilon^2(-s^2)^N = 0$$

juuret, jotka majailevat vasemmassa puolitasossa. Halutut juuret ovat

$$s_k = \frac{1}{\epsilon^{1/N}} e^{j\pi[1/2+(2k-1)/(2N)]}, k = 1, 2, \dots, N.$$

Navat siis sijaisevat ympyrällä, jonka säde on $1/\epsilon^{1/N}$. Ensimmäisen navan kulma on $\pi/2 + \pi/(2N)$. Seuraavien napojen kulmat poikkeavat toisistaan π/N :n verran. Tulokseksi saatava kokonaissiirtofunktio on

$$H_a(s) = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)},$$

missä vakio k_0 on valittava siten, että $|H_a(j\Omega)|$ saa arvon 1 nollataajuudella ($H(0) = 1$). On syytä mainita, että monesti Butterworth-suodattimelle oletetaan että $\epsilon^2 = 1$.

Sitten itse tehtävään.

1) Bilineaarimuunoksen vakioksi c tulee

$$c = \cot(\omega_p/2) = \cot(0.1\pi) = 3.07768.$$

2) Analogisen suodattimen estokaistan aluksi saadaan

$$\Omega_s = c \tan(\omega_s/2) = c \tan(0.2\pi) = 2.23607.$$

3) ϵ^2 on

$$\epsilon^2 = 10^{A_{max}/10} - 1 = 10^{0.3} - 1 = 1.$$

4) Vaadittavaksi asteluvuksi saadaan

$$N \geq \frac{\log_{10}[(10^{0.1A_{min}} - 1)/\epsilon^2]}{2 \cdot \log_{10} \Omega_s} = \frac{\log_{10}(10^2 - 1)}{2 \cdot \log_{10} 2.23607} = 2.8551$$
$$\Rightarrow N = 3$$

5) Analogisen suodattimen navat ovat

$$s_k = e^{j\pi[1/2+(2k-1)/6]}, k = 1, 2, 3$$

eli

$$s_1 = e^{j2\pi/3}$$

$$s_2 = e^{j\pi} = -1$$

$$s_3 = e^{-j2\pi/3}$$

Siirtofunktioksi $H_a(s)$ tulee

$$H_a(s) = \frac{1}{B_3(s)},$$

missä

$$B_3(s) = (s - s_2)[(s - s_1)(s - s_3)] = (s + 1)(s^2 + s + 1)$$

Tässä tapauksessa vakio $k_0 = 1$.

6) Sijoittamalla

$$s = c \frac{z - 1}{z + 1} = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = 3.07768 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$H_a(s)$:n lausekkeeseen, saadaan digitaalisen suodattimen siirtofunktioksi

$$H(z) = \frac{(1 + z^{-1})^3}{[c(1 - z^{-1}) + (1 + z^{-1})][c^2(1 - z^{-1})^2 + c(1 - z^{-2}) + (1 + z^{-1})^2]}$$
$$= \frac{(1 + z^{-1})^3 / [(c + 1)(c^2 + c + 1)]}{[1 + \frac{1-c}{1+c}z^{-1}][1 + \frac{1-2c}{1+c+c^2}z^{-1} + \frac{1-c+c^2}{1+c+c^2}z^{-2}]}$$

$$= \frac{0.018099(1 + z^{-1})^3}{[1 - 0.509525z^{-1}][1 - 1.25050z^{-1} + 0.545717z^{-2}]}$$

Kuvassa 17 on esitetty useita suunnitellun suodattimen toimintaa kuvaavia vasteita.

Tehtävä 17: Suunnittele digitaalinen Chebyshev-suodatin, joka täyttää ehdot

$$-1 \leq 20 \cdot \log_{10} |H(e^{j\omega})| \leq 0, \quad 0 \leq |\omega| \leq 0.2\pi$$

$$20 \cdot \log_{10} |H(e^{j\omega})| \leq -50, \quad 0.5\pi \leq |\omega| \leq \pi.$$

Analogisen Chebyshev suodattimen siirtofunktio on myös muotoa

$$H_a(s) = \frac{k_0}{B_N(s)} = \frac{k_0}{\prod_{k=1}^N (s - s_k)}$$

Sen amplitudivasteen neliö on

$$|H_a(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 V_N^2(\Omega)},$$

missä

$$V_N(\Omega) = \begin{cases} \cos(N \cos^{-1} \Omega), & |\Omega| \leq 1 \\ \cosh(N \cosh^{-1} \Omega) & |\Omega| > 1 \end{cases}$$

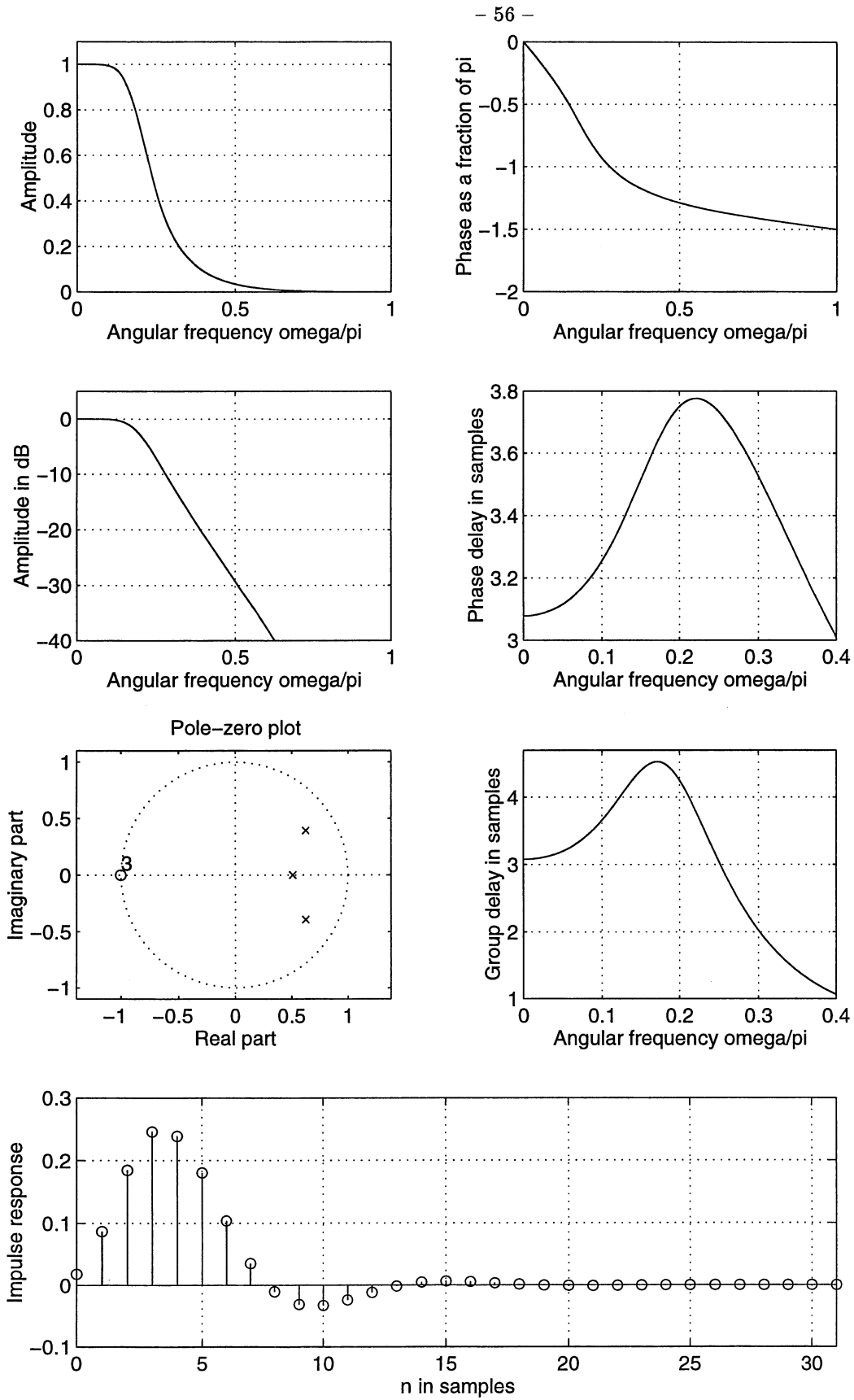
on N :nnen asteen Chebyshevin polynomi.

Jos suodattimen päästökaistavaihtelu on desibeleissä A_{max} , niin

$$\epsilon^2 = 10^{A_{max}/10} - 1.$$

Jos estokaistan alku on Ω_s ja minimivaimennus estokaistalla on A_{min} , asteluvun N tulee täyttää ehto

$$N \geq \frac{\cosh^{-1}[(10^{A_{min}/10} - 1)/\epsilon^2]^{1/2}}{\cosh^{-1}(\Omega_s)},$$



Kuva 17. Tehtävän 16 suodattimen vasteet.

missä $\cosh^{-1} x$ saadaan kaavasta

$$\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

Suodattimen navat sijaitsevat pisteissä

$$s_k = \sigma_k + j\Omega_k, \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

missä

$$\begin{aligned}\sigma_k &= -\frac{\gamma - \gamma^{-1}}{2} \sin\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \\ \Omega_k &= \frac{\gamma + \gamma^{-1}}{2} \cos\left[\frac{(2k-1)\pi}{2N}\right] \\ \gamma &= \left(\frac{1 + \sqrt{1 + \epsilon^2}}{\epsilon}\right)^{1/N}.\end{aligned}$$

Ratkaistaan sitten itse ongelma.

1) Bilineaarimuunoksen vakioksi c saadaan

$$c = \cot(\omega_p/2) = \cot(0.1\pi) = 3.07768.$$

2) Analogisen suodattimen estokaistan aluksi tulee

$$\Omega_s = c \tan(\omega_s/2) = c \tan(0.25\pi) = 3.07768.$$

3) ϵ^2 on

$$\epsilon^2 = 10^{A_{max}/10} - 1 = 10^{0.1} - 1 = 0.258925.$$

4) Sijoittamalla $A_{min} = 50$, $\epsilon^2 = 0.258925$ ja $\Omega_s = 3.07768$ edellä esitettyyn lausekkeeseen, saadaan asteluvulle ehto

$$N \geq 3.98096 \Rightarrow N = 4.$$

5) Navoiksi tulee edellä annetun kaavan avulla

$$s_1 = -0.33686975 + j0.40732881$$

$$s_2 = -0.13953604 + j0.98337913$$

$$s_3 = -0.13953604 - j0.98337913$$

$$s_4 = -0.33686975 - j0.40732881.$$

Yhdistelemällä kompleksikonjugaattinaparit voidaan siirtofunktio kirjoittaa muotoon

$$H_a(s) = \frac{k_0}{(s^2 + 0.27907s + 0.98650)(s^2 + 0.67374s + 0.27940)}.$$

k_0 voidaan määrätä sen tiedon perustella, että parillisasteisen Chebyshev-suodattimen itseisarvon neliö saa arvon $1/(1 + \epsilon^2)$ nollataajudella. (Kun N on pariton, vastaava arvo on yksi.) Tästä seuraa

$$H_a(0) = \frac{k_0}{0.98650 \cdot 0.27940} = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 0.258925}}$$

ja k_0 :ksi saadaan $k_0 = 0.24565$.

4) Sijoittamalla

$$s = c \frac{z - 1}{z + 1} = c \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} = 3.07768 \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

$H_a(s)$:n lausekkeeseen, tulee digitaalisen suodattimen siirtofunktioksi

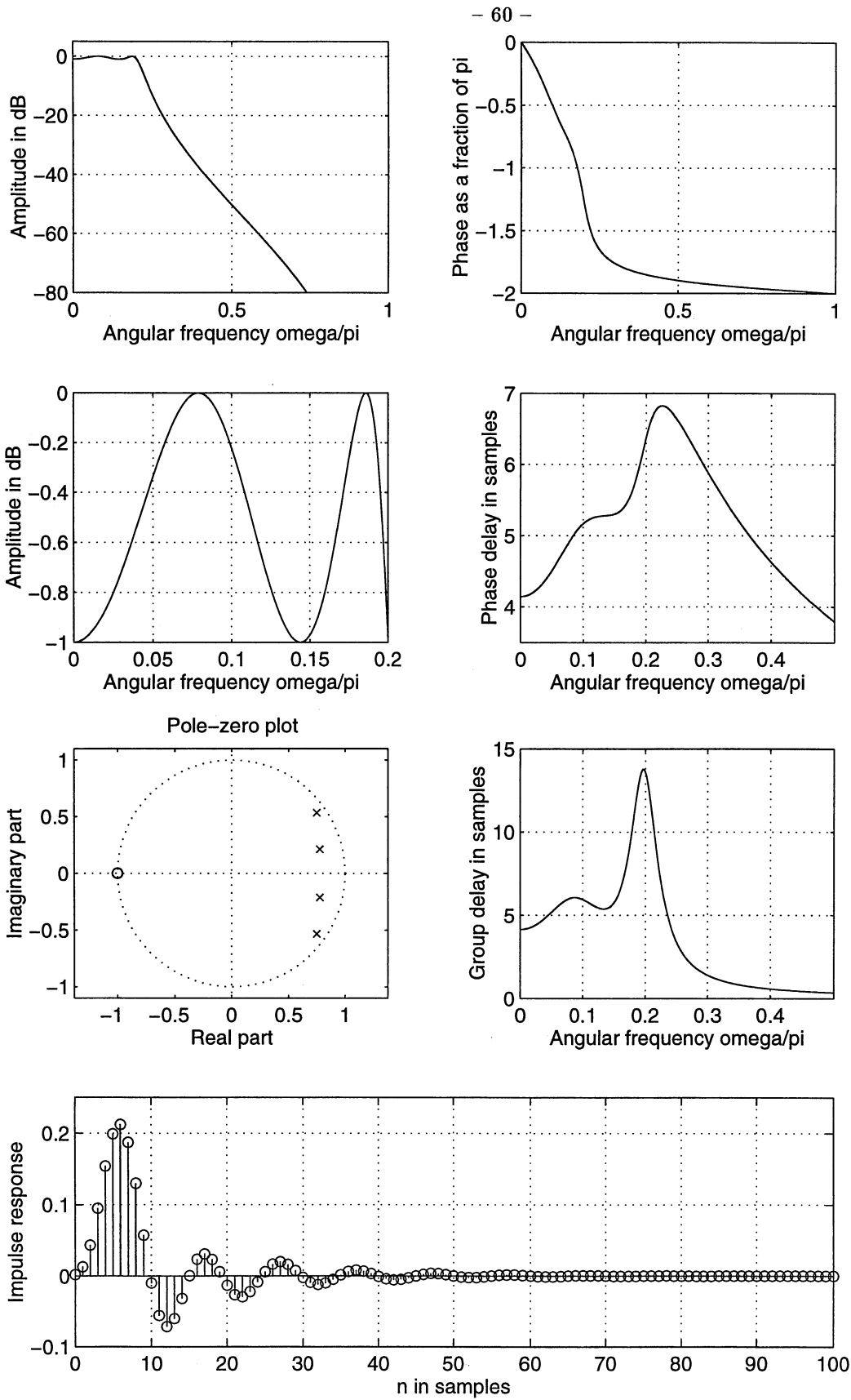
$$H(z) = \frac{0.00183556(1 + z^{-1})^4}{(1 - 1.499554z^{-1} + 0.848218z^{-2})(1 - 1.554785z^{-1} + 0.649295z^{-2})}.$$

Kuvassa 18 on esitetty useita suunnitellun Chebyshev-suodattimen vasteita. Vertailun vuoksi kuvassa 19 on esitetty vastaavan Butterworth-suodattimen vasteet, kuvassa 20 käänteisen Chebyshev-suodattimen vasteet ja kuvissa 21 ja 22 kahden elliptisen suodattimen vasteet. Kaikki nämä suodattimet on suunniteltu siten, että päästökaistan reuna on $\omega_p = 0.2\pi$ ja päästökaistavaihtelu

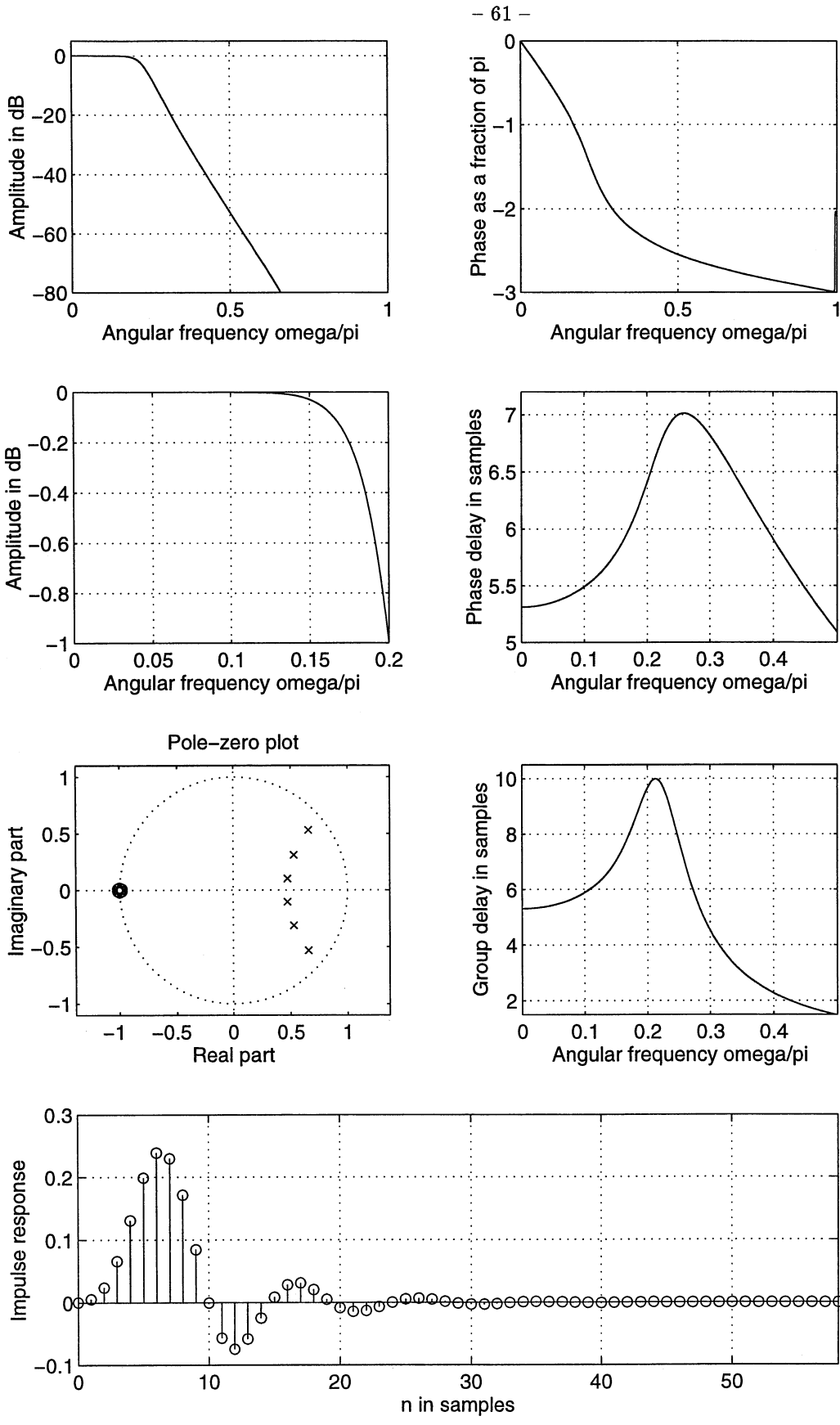
on 1 dB. Estokaistan alku on $\omega_s = 0.5\pi$. Sekä Chebyshev-suodattimen että käänteinen Chebyshev-suodatin, joiden asteluvut ovat neljä (napojen ja nollien lukumäärä), ylittävät vaaditun 50 desibelin vaimennuksen tarkalleen saman verran (50.3 dB). Butterworth-suodattimen vaadittu asteluku on 6 (52.7 dB). Elliptinen suodatin on suunniteltu asteluvuille kolme ja neljä, koska asteluvulla 3 vaatimukset eivät aivan täyty (46.7 dB), kun taas asteluvulla 4 vaatimukset ylitetään reippaasti (68.4 dB).

Näin ollen elliptinen suodatin on vaimennusominaisuuksien suhteen tehokkain ja Butterworth-suodatin heikoin, kun taas Chebyshev-suodatin ja käänteinen Chebyshev-suodatin ovat samanlaiset. Edellä esitetyistä kuvista voimme havaita kunkin suodatintyyppin luonteenomaiset piirteet. Sekä Butterworth-suodatin että Chebyshev-suodatin ovat maksimaalisen laakalatvaisia nollataajuuden läheisyydessä, joka merkitsee sitä että ne approksimoivat hyvin tarkasti ykköistä tämän taajuuden läheisyydessä. Itse asiassa amplitudivasteen mahdollisimman monta derivaatta on nolla nollataajuudella. Sekä käänteisen Chebyshev-suodattimen että elliptisen suodattimen amplitudivaste saavuttaa päästökaistalla arvot 0 dB ja 1 dB mahdollisimman monessa pisteessä (asteluku + 1). Tästä seuraa nimitys tasa-aaltainen päästökaista.

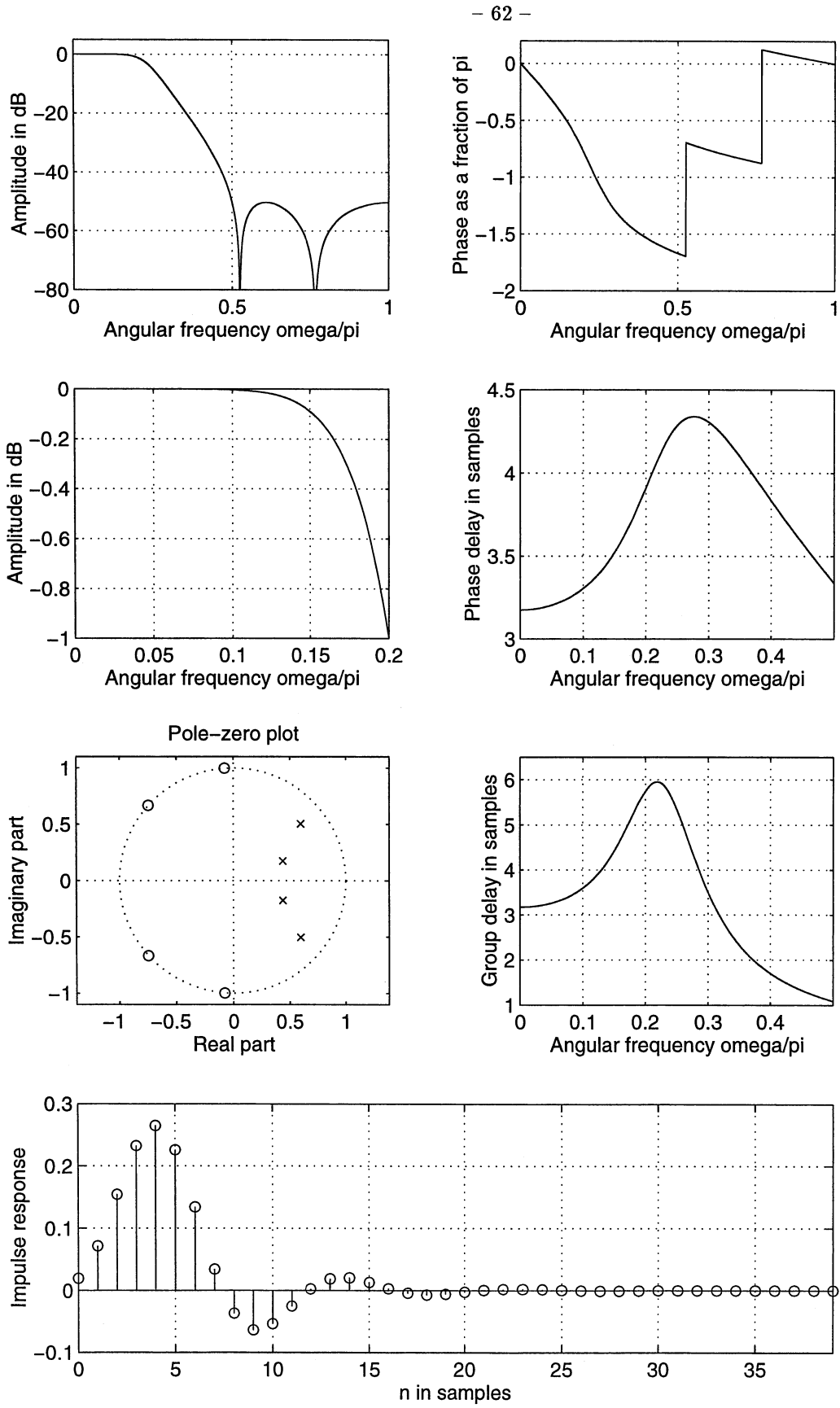
Sekä Butterworth-suodattimella että käänteisellä Chebyshev-suodattimella kaikki nollat sijaitsevat pisteessä $z = -1$ ($\omega = \pi$). Näin ollen niiden amplitudivasteella on mahdollisimman monta derivaatta nolliä kulmataajuudella $\omega = \pi$ (maksimaalisen laakalatvainen estokaista). Sekä Chebyshev-suodattimen että elliptisen suodattimen amplitudivaste on tasa-aaltainen estokaistalla saavuttaen äärettömän vaimennuksen (kulmataajuuksilla, joilla nollat majailevat) ja minimivaimennuksen mahdollisimman monessa pisteessä (asteluku + 1).



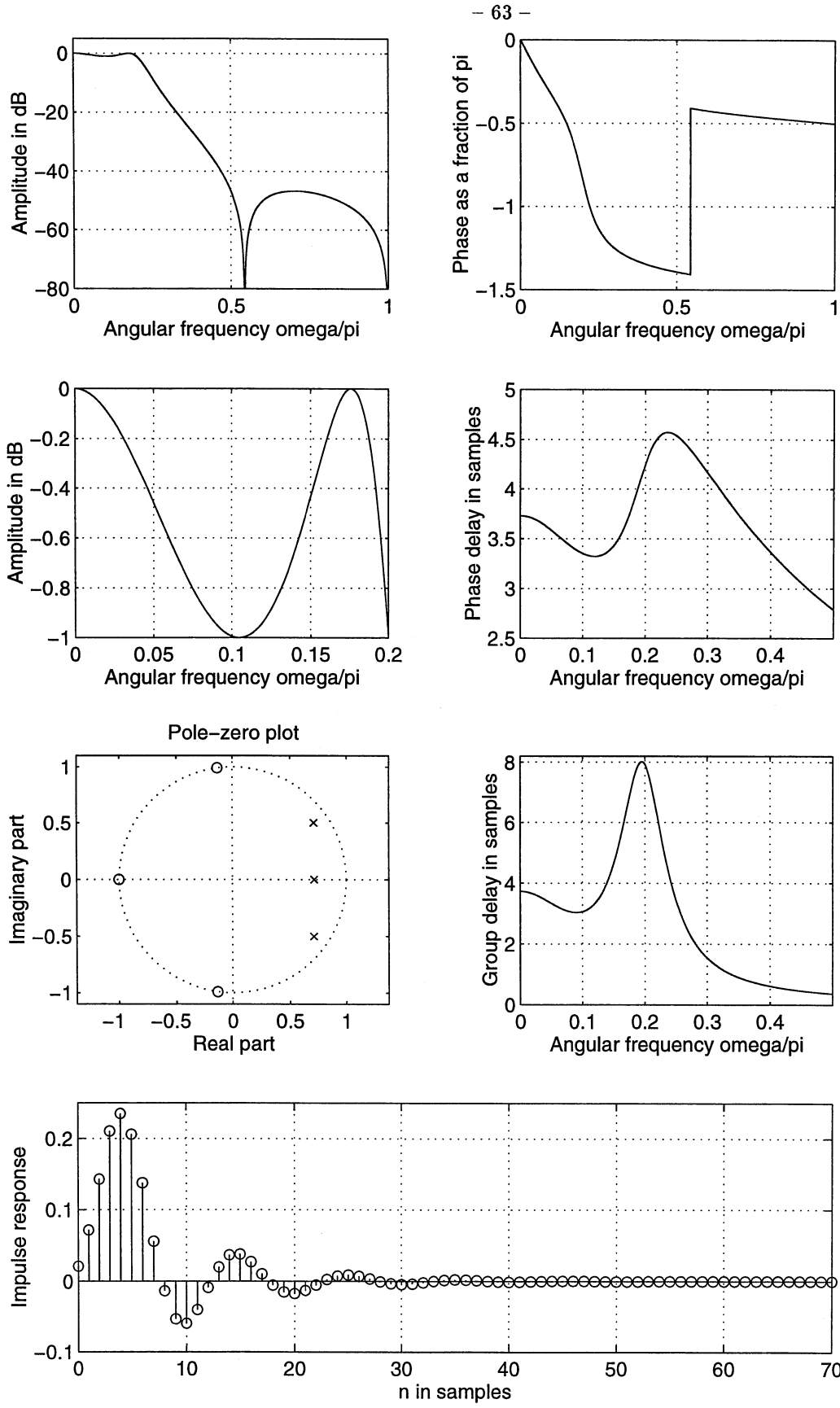
Kuva 18. Tehtävän 17 Chebyshev-suodattimen vasteet. Asteluku on 4.



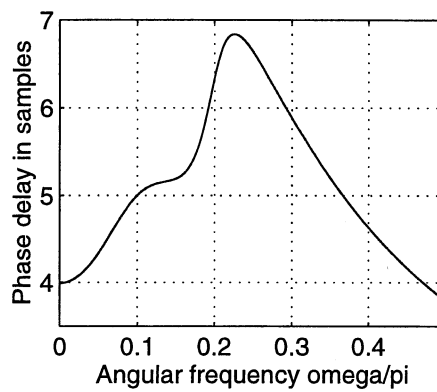
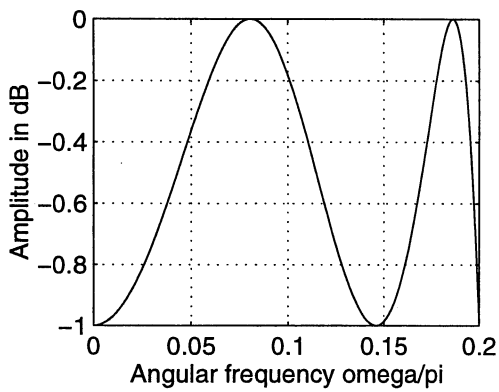
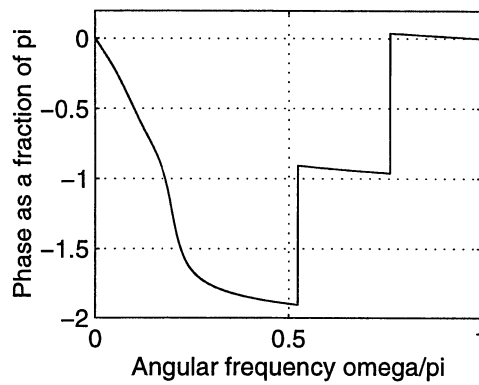
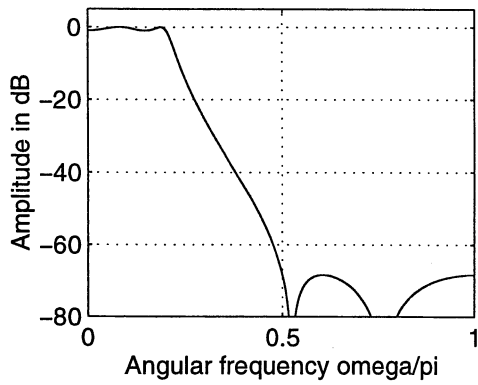
Kuva 19. Butterworth-suodattimen vasteet. Asteluku on 6.



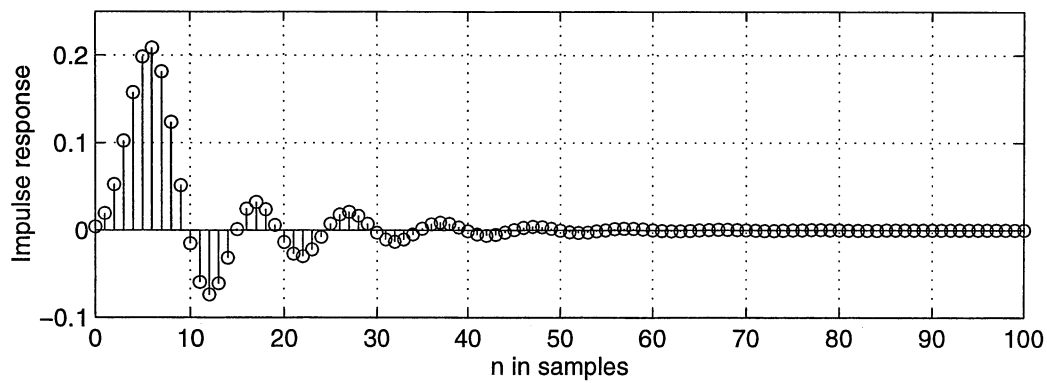
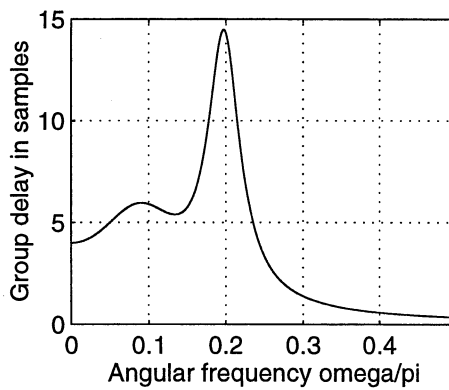
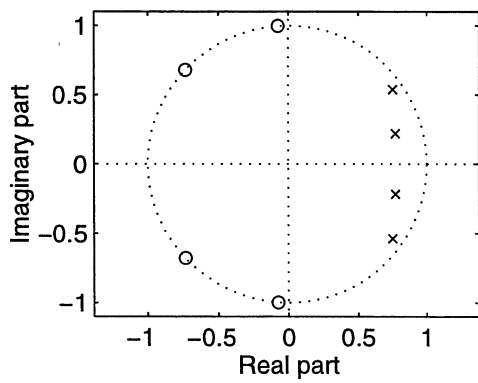
Kuva 20. Käänteisen Chebyshev-suodattimen vasteet. Asteluku on 4.



Kuva 21. Elliptisen suodattimen vasteet. Asteluku on 3.



Pole-zero plot



Kuva 22. Elliptisen suodattimen vasteet. Asteluku on 4.

Verrattaessa Chebyshev-suodattimen ja käänteisen Chebyshev-suodattimen vaihe- ja viivekäyriä keskenään havaitaan, että käänteisen Chebyshev-suodattimen käyttäytyminen on paljon parempi.

Tehtävä 18: Halutaan neljännen asteen Chebyshev-ylipäästösuoatim, jonka päästökaistan rajataajuus on $\omega_p = 0.6\pi$ ja päästökaistan aaltoilu on 1 dB. Käytä tehtävän 17 tulosta ja taajuusmuunnoksia hyväksesi siirtofunktion määräämisessä.

Tehtävämme ylipäästösuoatim saadaan aikaan korvaamalla z^{-1} tehtävän 17 alipäästösuoatimien siirtofunktiossa lausekkeeksi

$$-\frac{z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha z^{-1}},$$

missä

$$\alpha = -\frac{\cos[(\theta_p + \omega_p)/2]}{\cos[(\theta_p - \omega_p)/2]}.$$

Yllä olevassa yhtälössä ω_p on halutun ylipäästösuoatimien rajataajuus ja θ_p on suunnittelun perustana olevan alipäästösuoatimien rajataajuus.

Sijoittamalla $\omega_p = 0.6\pi$ ja $\theta_p = 0.2\pi$ saadaan

$$\alpha = -\frac{\cos[(0.2\pi + 0.6\pi)/2]}{\cos[(0.2\pi - 0.6\pi)/2]} = -0.381966$$

ja z^{-1} :n korvaavaksi lausekkeeksi tulee

$$-\frac{z^{-1} - 0.381966}{1 - 0.381966z^{-1}}.$$

Tulokseksi saatava siirtofunktio voidaan kirjoittaa edellisen sijoituksen jälkeen seuraavaan muotoon

$$H(z) = \frac{0.0242612(1 - z^{-1})^4}{(1 + 1.041569z^{-1} + 0.401949z^{-2})(1 + 0.556147z^{-1} + 0.764714z^{-2})}.$$

Tämän suodattimen vasteet on esitetty kuvassa 23 (Pisteessä $z = -1$ on neljännollaa, vaikka kuva näyttää vain kolmea).

Tehtävä 19: Määrää tehtävän 17 tuloksen perusteella kahdeksannen asteen Chebyshev-kaistanpäästösuodattimen siirtofunktio, jonka päästökaistan rajataajuudet ovat $\omega_{p1} = 0.4\pi$, $\omega_{p2} = 0.6\pi$ ja jonka päästökaistan aaltoilu on 1 dB.

Tehtävämme kaistanpäästösuodatin saadaan aikaan korvaamalla z^{-1} tehtävän 17 alipäästösuodattimen siirtofunktiossa lausekkeella

$$-\frac{z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} - \frac{k-1}{k+1}}{\frac{k-1}{k+1}z^{-2} - \frac{2\alpha k}{k+1}z^{-1} + 1}$$

missä

$$\alpha = \frac{\cos[(\omega_{p1} + \omega_{p2})/2]}{\cos[(\omega_{p2} - \omega_{p1})/2]}$$

ja

$$k = \cot[(\omega_{p2} - \omega_{p1})/2] \tan(\theta_p/2).$$

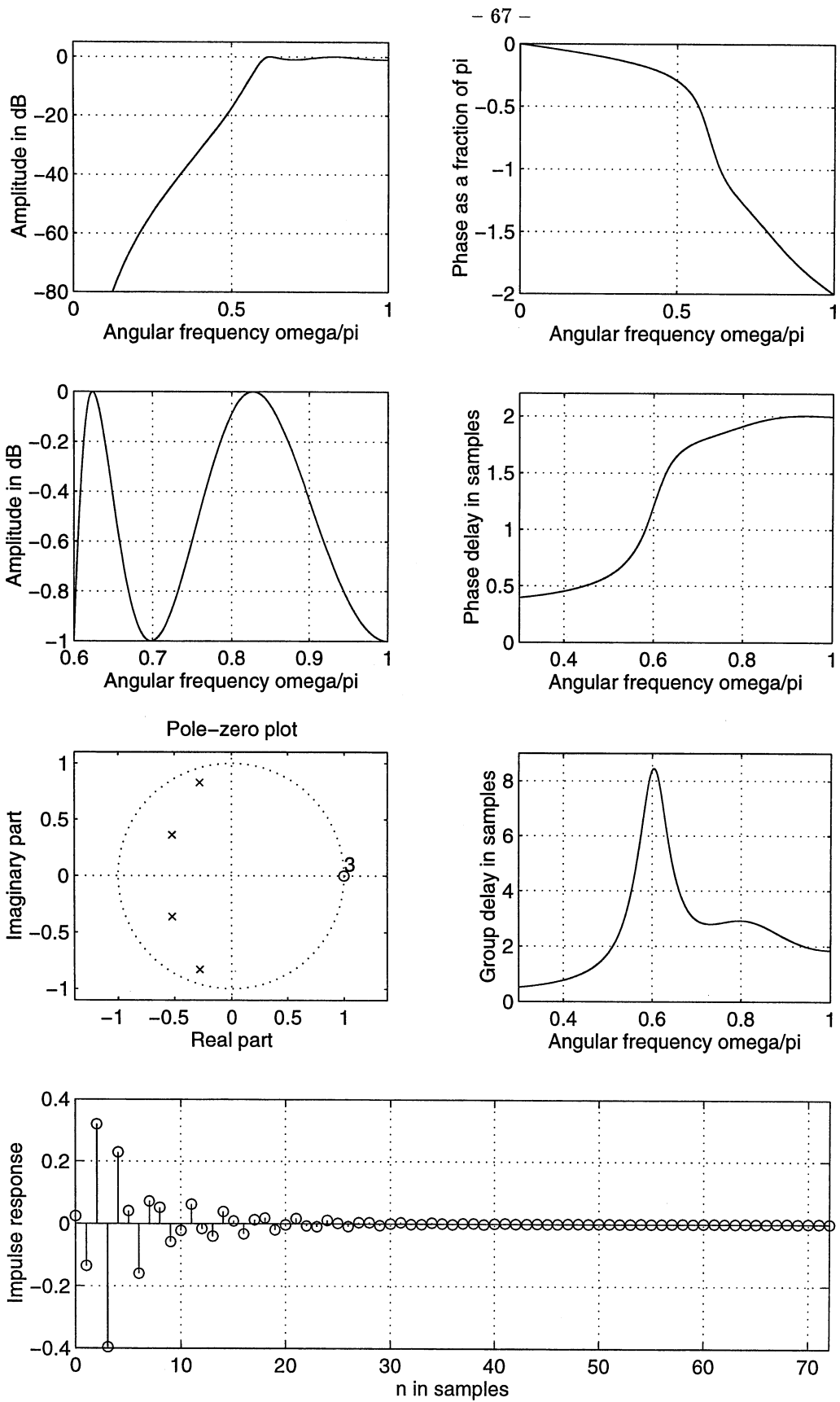
Yllä olevissa lausekkeissa ω_{p1} ja ω_{p2} ovat halutun kaistanpäästösuodattimen päästökaistan rajataajuudet ja θ_p on suunnittelun perustana olevan alipäästösuodattimen rajataajuus.

Sijoittamalla $\omega_{p1} = 0.4\pi$ ja $\omega_{p2} = 0.6\pi$ ja $\theta_p = 0.2\pi$ saadaan

$$\alpha = 0, \quad k = 1$$

z^{-1} :n korvaavaksi lausekkeeksi tulee yksinkertaisesti $-z^{-2}$. Sijoittamalla tämä lauseke tehtävän 17 siirtofunktioon saadaan

$$H(z) = \frac{0.00183556(1 - z^{-2})^4}{(1 + 1.499554z^{-2} + 0.848218z^{-4})(1 + 1.554785z^{-2} + 0.649295z^{-4})}.$$



Kuva 23. Tehtävän 18 suodattimen vasteet. Asteluku on 4.

Kuvassa 24 on esitetty tämän suodattimen vasteet.

Tehtävä 20: FIR-suodattimen, jonka impulssivasteen pituus 3, kertoimet ovat $h[0] = h[1] = h[2] = 1/3$.

- (a) Mikä on suodattimen siirtofunktio?
- (b) Missä suodattimen navat ja nollat hiihtelevät?
- (c) Laske suodattimen nollavaihevaste ja vaihevaste sekä ryhmä- ja vaiheviiveet.
- (d) Toteuta suodatin käyttäen mahdollisimman vähän kertolaskuja.

20(a):

$$h[n] = \frac{1}{3}(\delta[n] + \delta[n - 1] + \delta[n - 2])$$
$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2}).$$

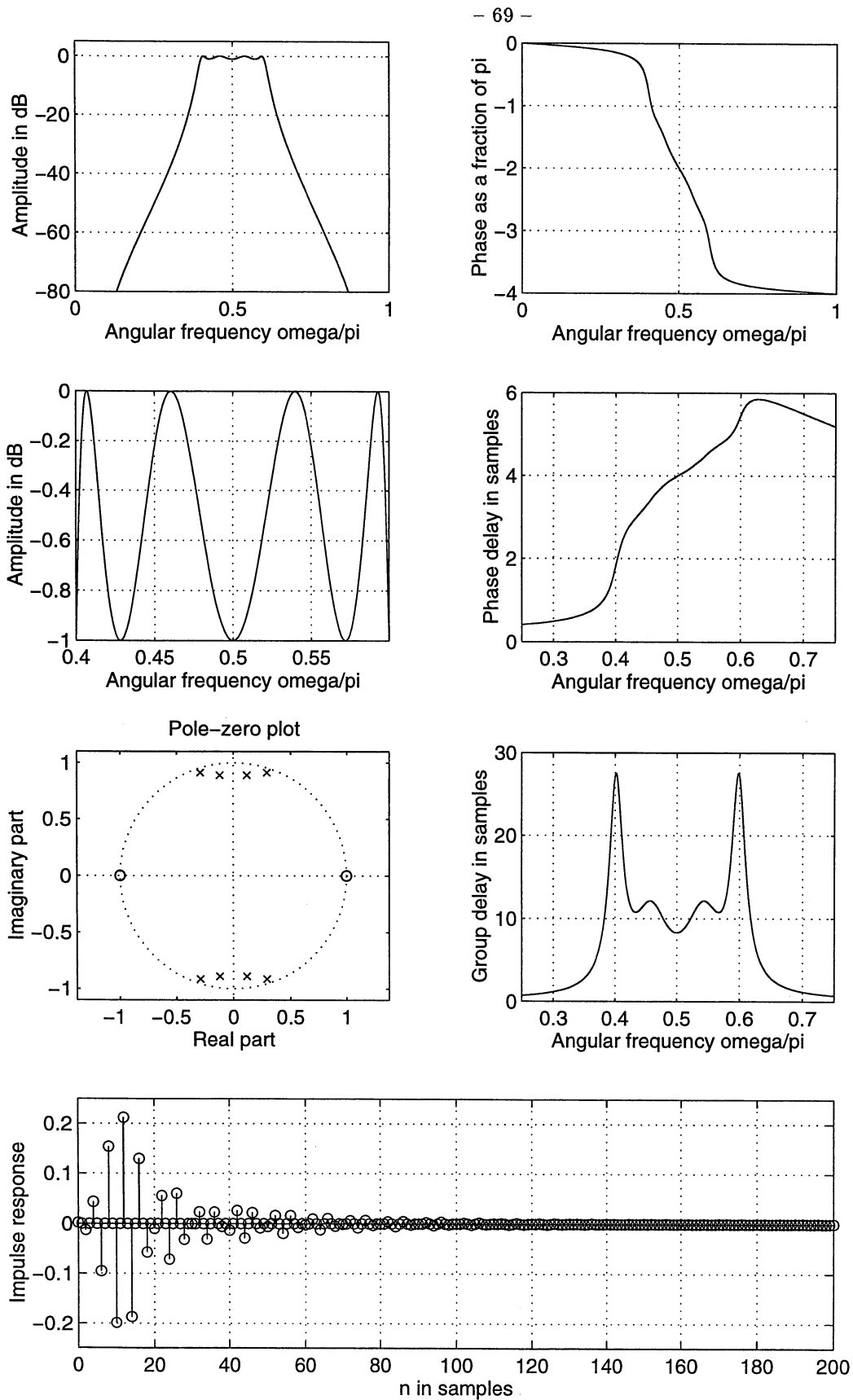
20(b): $H(z)$ voidaan lausua myös muodossa

$$H(z) = \frac{1}{4} \frac{z^2 + z^1 + 1}{z^2}.$$

$\Rightarrow H(z)$:lla on nollapari yksikköympyrällä pisteissä $z = \exp(\pm j2\pi/3)$ ja kaksi napaa pisteessä $z = 0$.

20(c):

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}e^{-j\omega} + \frac{1}{3}e^{-j2\omega}$$
$$= e^{-j\omega} \left[\frac{1}{3}(e^{j\omega} + 1 + e^{-j\omega}) \right] = e^{-j\omega} \left[\frac{1}{3}(1 + 2 \cos \omega) \right] = H(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$



Kuva 24. Tehtävän 19 suodattimen vasteet. Asteluku on 8.

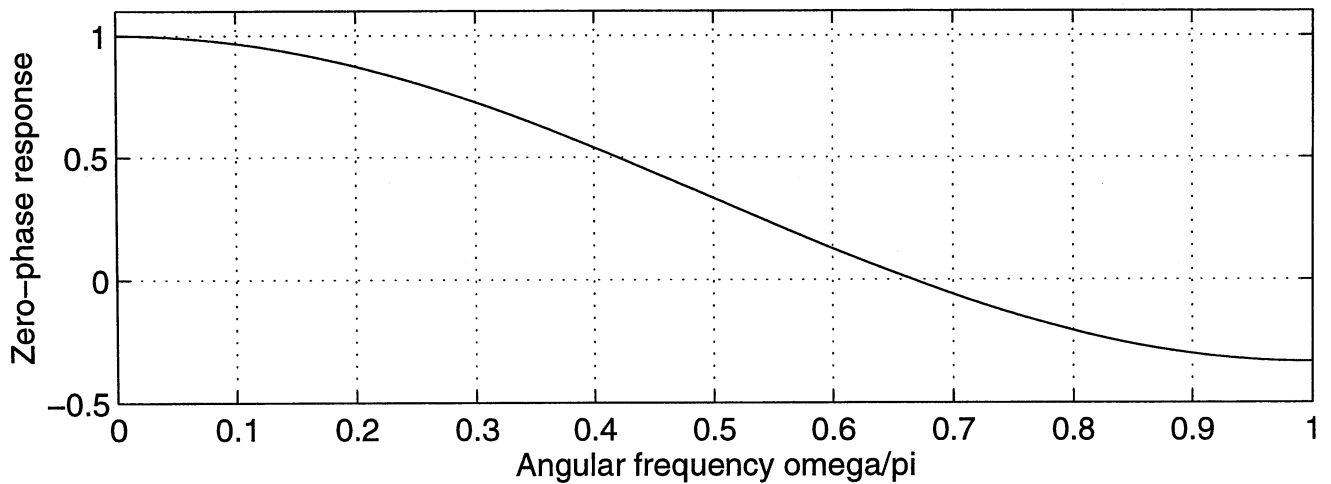
$$\Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{3}(1 + 2 \cos \omega)$$

$$\phi(\omega) = -\omega$$

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\phi(\omega)}{d\omega} = 1$$

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\phi(\omega)}{\omega} = 1.$$

Kuvassa 25 on esitetty suodattimen nollavaihevaste.



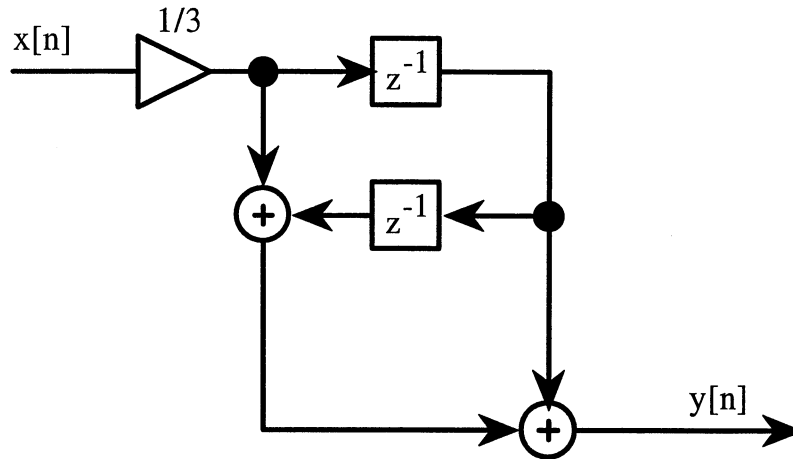
Kuva 25. Tehtävän 20 suodattimen nollavaihevaste.

20(d): Yksinkertaisin toteutus saadaan aikaan kirjoittamalla $H(z)$ muotoon

$$H(z) = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-3}).$$

Tulokseksi saatava toteutus on esitetty kuvassa 26.

Tehtävä 21: Halutaan suunnitella digitaalinen FIR-alipäästösuodatin, joka



Kuva 26. Tehtävän 20 suodattimen toteutus.

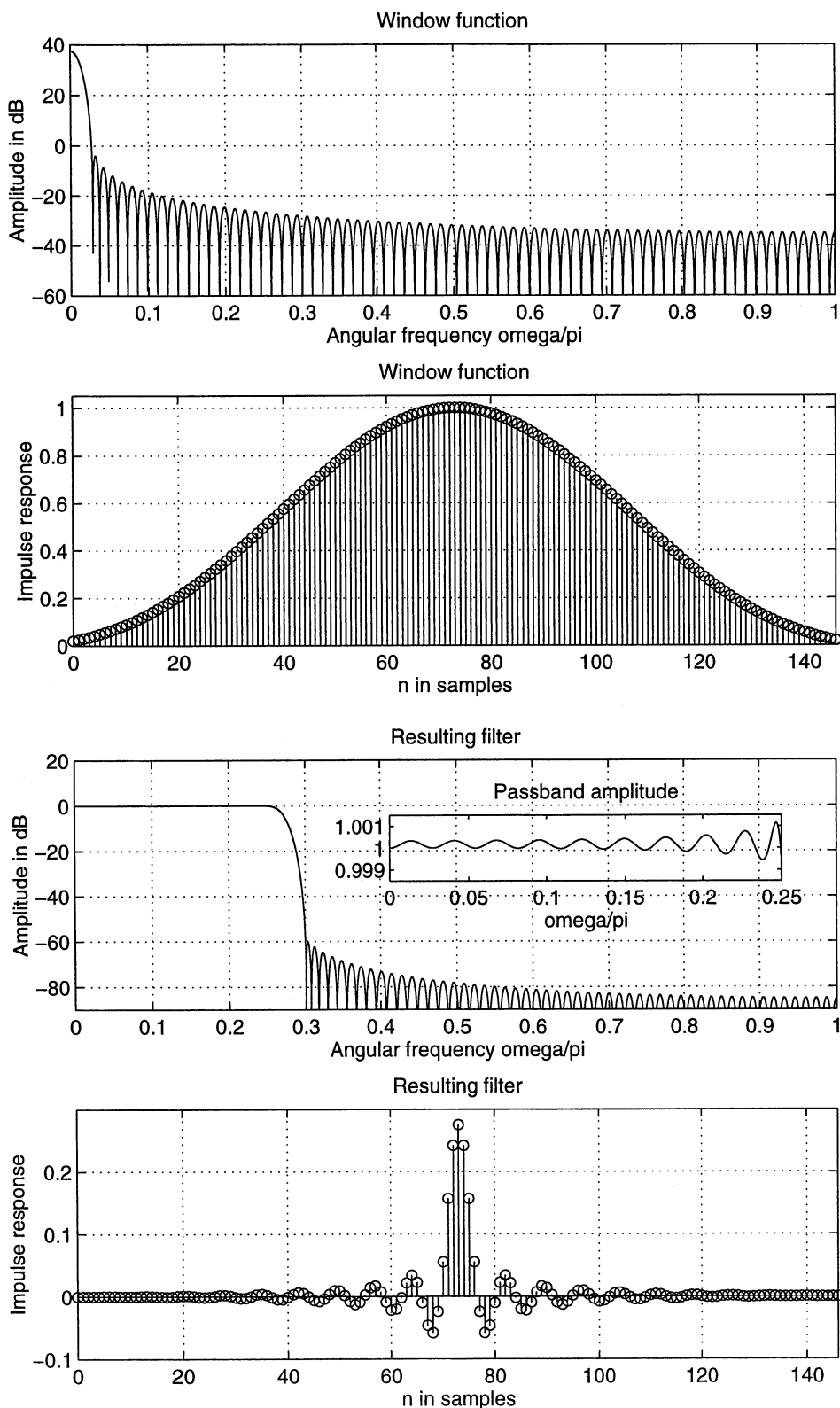
täyttää ehdot

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad 0 \leq \omega \leq 0.25\pi$$

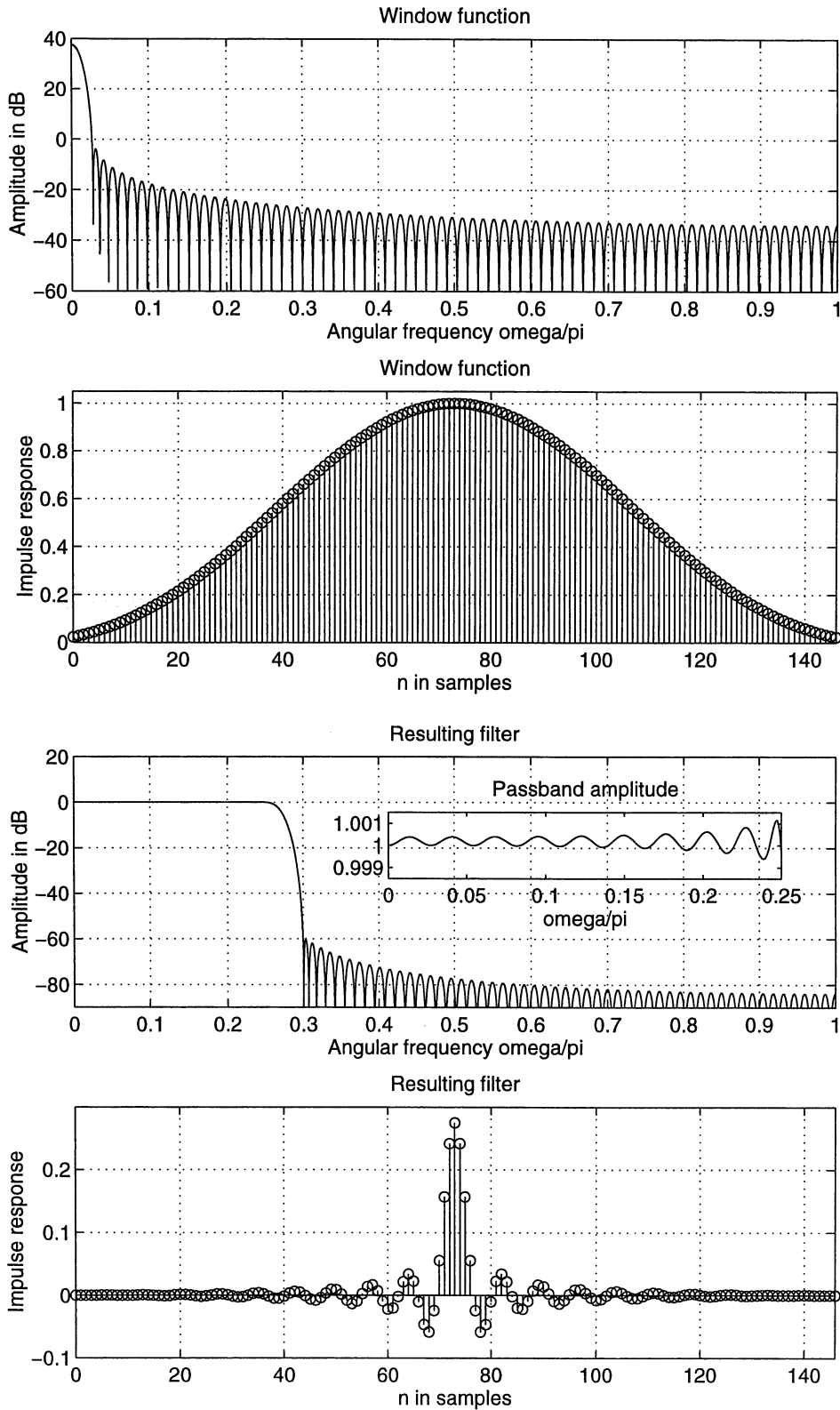
$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001, \quad 0.3\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Suunnittele suodatin käyttäen Kaiser, Saramäki, Dolph-Chebyshev, ja transitionaalista ikkunaa ja vertaile tuloksia keskenään. Käytettävissäsi on matlab-ohjelma (Appendix A), joka automaattisesti etsii muuneltavan parametrin kullekin ikkunalle siten, että estokaistan maksimiksi tulee juuri haluttu arvo. Samanaikaisesti ohjelma hakee minimiasteluvun, jolla vaatimukset täytetään.

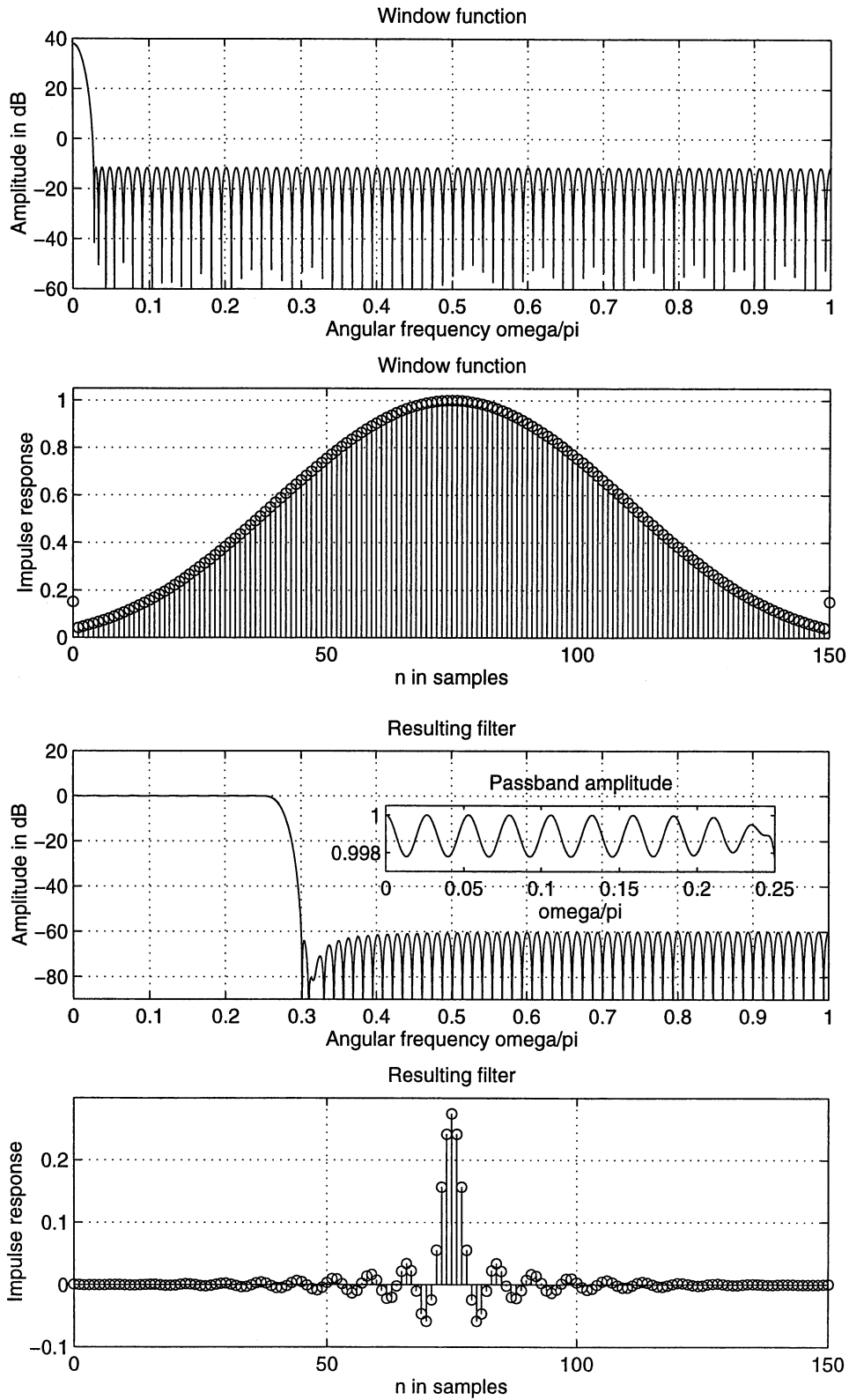
Kuvissa 27, 28, 29 ja 30 on annettu sekä ikkunafunktioiden että tulokseksi saatavien suodattimien taajuus- ja aikavasteet. Kuten olettaa sopiikin, transitionaalinen ikkuna tuottaa halutun vasteen pienimmällä asteluvulla 136, kun taas Dolph-Chebyshevin ikkuna vaatii suurimman asteluvun 150. Kaiserin ja Saramäen ikkunoiden vaaditut asteluvut ovat 146. Havaitse se tosiseikka, että transitionaalisen ikkunan ja Dolph-Chebyshevin ikkunan impulssivasteen ensimmäinen ja viimeinen arvo ovat suhteellisen suuria.



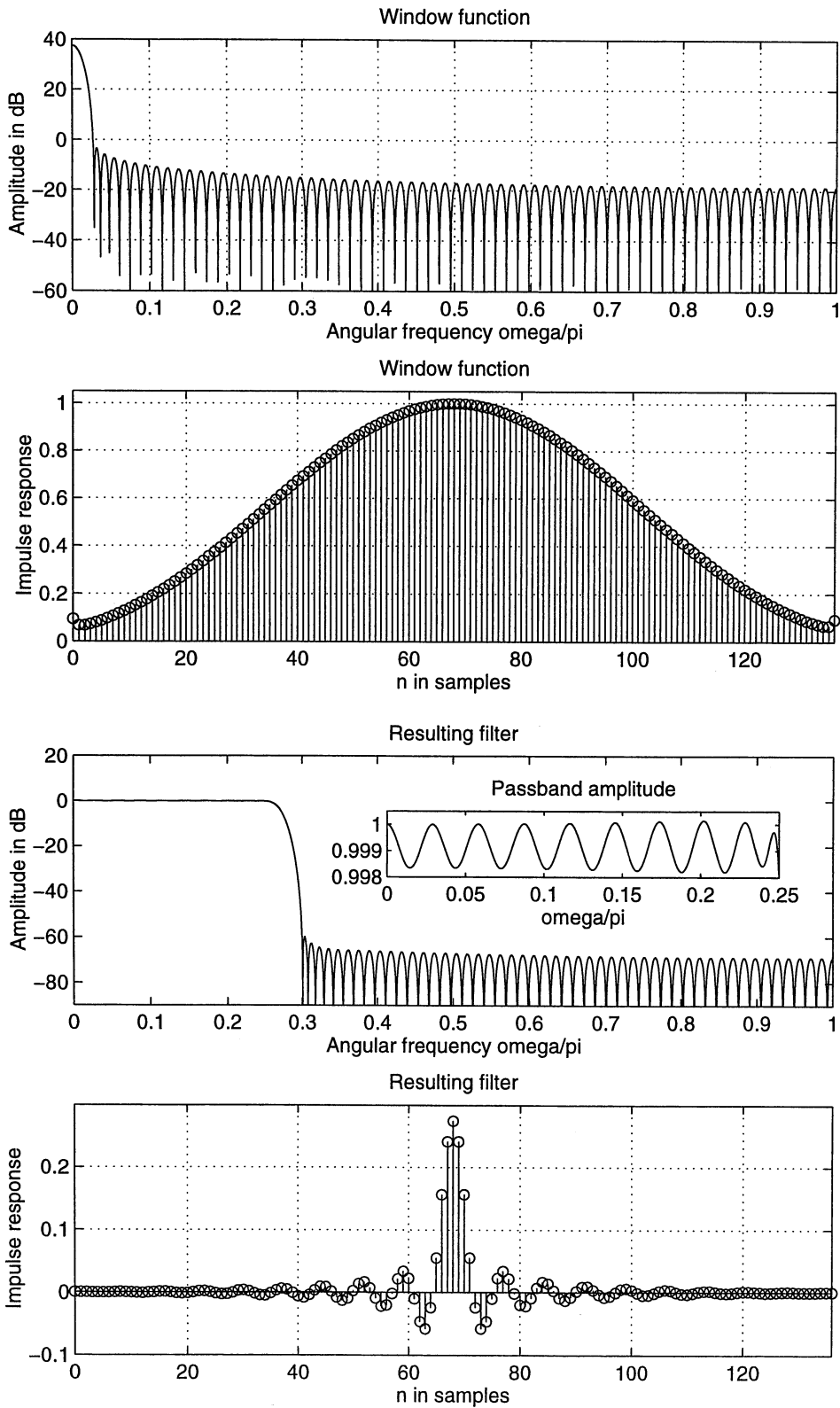
Kuva 27. Taajuus- ja aikavasteet sekä Kaiserin ikkunafunktiolle että tulokseksi saatavalle suodattimelle. Asteluku on 146.



Kuva 28. Taajuus- ja aikavasteet sekä Saramäen ikkunafunktiolle että tulokseksi saatavalle suodattimelle. Asteluku on 146.



Kuva 29. Taajuus- ja aikavasteet sekä Dolph-Chebyshevin ikkunafunktiolle että tulokseksi saatavalle suodattimelle. Asteluku on 150.



Kuva 30. Taajuus- ja aikavasteet sekä transitionaaliselle ikkunafunktiolle että tulokseksi saatavalle suodattimelle. Asteluku on 136.

Tehtävä 22: Halutaan suunnitella digitaalinen FIR-alipäästösuodatin, joka täyttää ehdot

$$0.99 \leq |H(e^{j\omega})| \leq 1.01, \quad 0 \leq \omega \leq 0.25\pi$$

$$|H(e^{j\omega})| \leq 0.001, \quad 0.3\pi \leq \omega \leq \pi.$$

Hae minimiastelukuinen lineaarivaiheinen tasa-aaltainen FIR-suodatin, kun käytettävissäsi on matlab-ohjelma (Appendix B), joka automaattisesti etsii kyseisen suodattimen. Vertaile tulokseksi saatavaa suodatinta edellisen tehtävän suodattimiin.

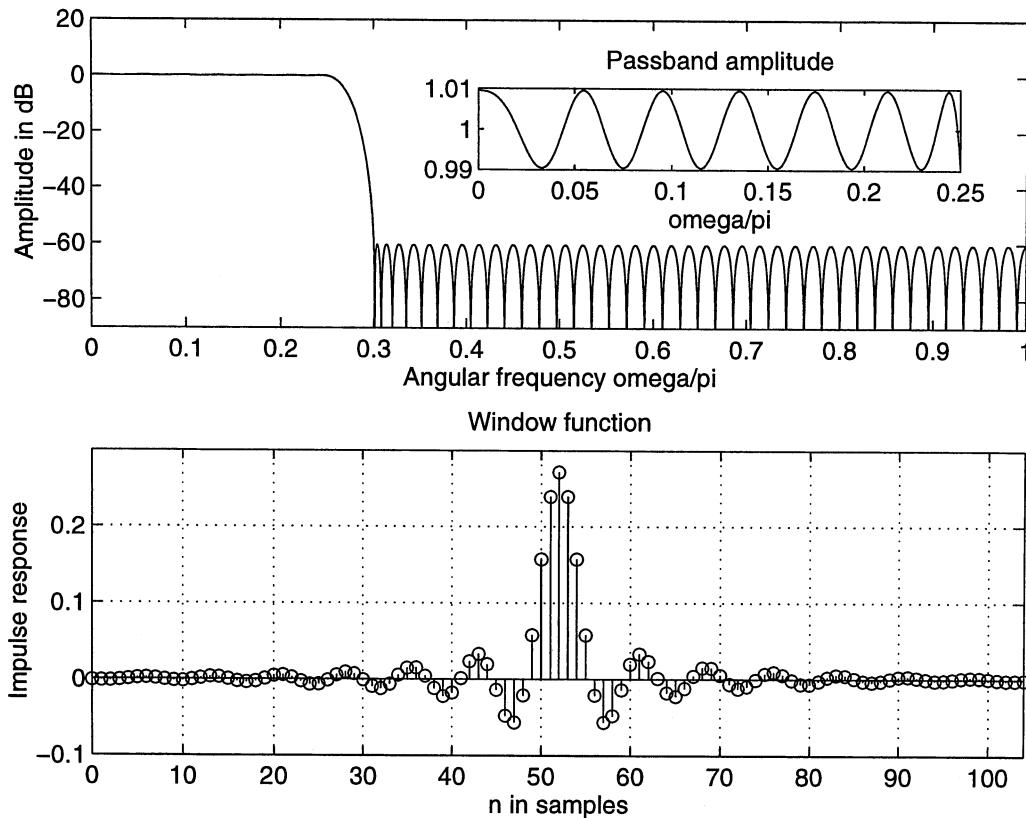
Minimiastelukuisen tasa-aaltoisen suodattimen amplitudi- ja impulssivasteet on esitetty kuvassa 31. Asteluku on 104, joka on pienempi kuin ikkunasuunnittelujen antama asteluku. Tämä johtuu kahdesta perussyystä. Ensinnäkin päästö- ja estokaistojen amplitudiripplet ovat tehtävässämme erisuuria ja ikkunasuunnittelu tekee ne kutakuinkin yhtäsuuriksi. Toiseksi tasa-aaltainen suodatin on todellinen optimi minimax-mielessä. On kuitenkin syytä huomauttaa se, että ikkunasuunnittelu on nopea työkalu suunniteltaessa pitkiäkin suodattimia, kun taas varsinkin Remez algoritmin matlab-versio 'lyö hanskat tiskiinkin' kun asteluku on useita satoja.

Tehtävä 23: Järjestelmä, jonka siirtofunktio on muotoa

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - az^{-1}},$$

on allpass-järjestelmä eli sen amplitudivasteen arvo on yksi kaikilla taajuuksilla. Allpass-suodattimien käyttöä tarkastellaan tarkemmin jatkokurssilla.

(a) Piirrä järjestelmän suoramuotoinen toteutus.



Kuva 31. Tehtävän 22 tasa-aaltainen lineaarivaiheinen FIR-suodatin. Asteluku on 104.

(b) Käytännössä (a)-kohdan toteutuksen kertoimet täytyy kvantisoida. Onko tulokseksi saatava järjestelmä edelleen allpass-suodatin?

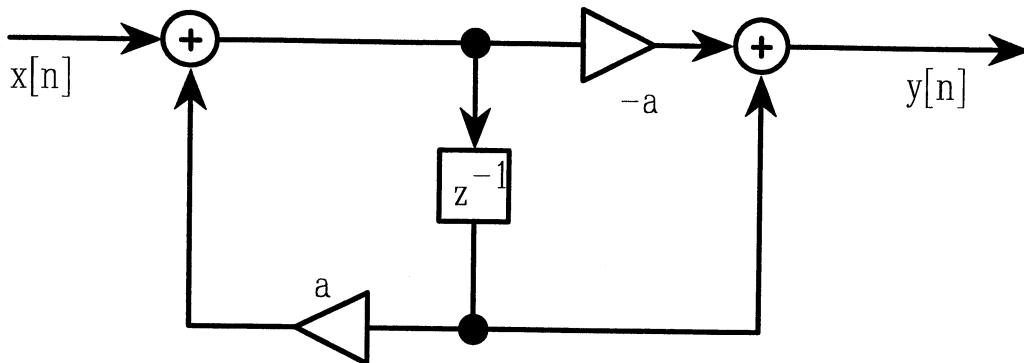
23(a): Siirtofunktion suoramuotoinen toteutus on esitetty kuvassa 32.

23(b): Kun kuvan 32 toteutuksen kertoimet a ja $-a$ kvantisoidaan arvoihin \hat{a} ja $-\hat{a}$, tulee siirtofunktioksi

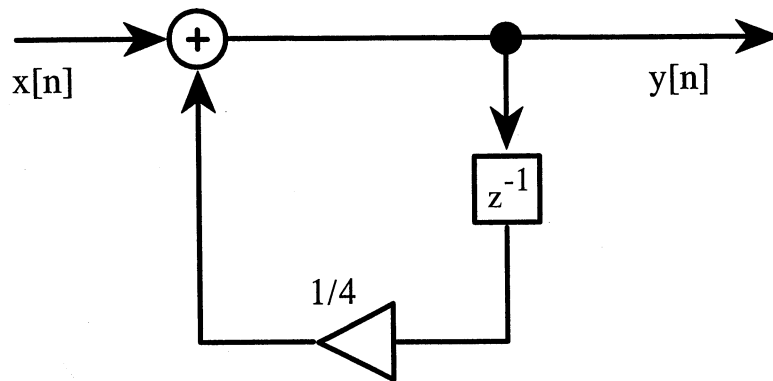
$$H(z) = \frac{z^{-1} - \hat{a}}{1 - \hat{a}z^{-1}},$$

joka on edelleen all-pass -järjestelmä.

Tehtävä 24: Tarkastellaan kuvan 33 mukaista järjestelmää.



Kuva 32. Ensimmäisen asteen allpass-suodattimen suoramuotoinen toteutus.



Kuva 33. Tehtävän 24 ensimmäinen järjestelmä.

- (a) Oletetaan, että käytettävissä oleva aritmetiikka on täydellinen. Etsi järjestelmän vaste sisäänmenolle

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Mikä on järjestelmän vaste, kun n on suuri?

- (b) Järjestelmä toteutetaan käyttäen kiinteän pilkun aritmetiikkaa. Järjestelmän kaikki kertoimet esitetään käyttäen etumerkillistä itseisarvoesitystä. Käytettävissä on viiden bitin rekisteri. Kaikki luvut ovat rekisterissä muodossa

$$|s|a|b|c|d|$$

$s =$ etumerkkibitti

$$\text{rekisterin arvo} = (-1)^s \cdot (a \cdot 2^{-1} + b \cdot 2^{-2} + c \cdot 2^{-3} + d \cdot 2^{-4}),$$

missä a, b, c ja d ovat joko nollia tai ykkösiä.

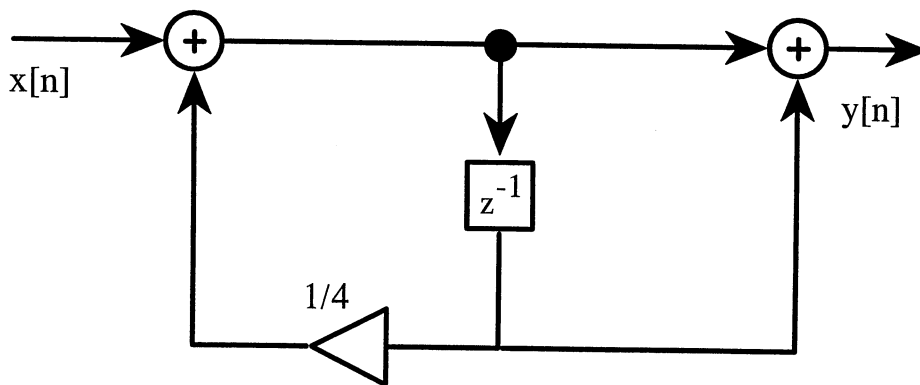
Kestolaskujen tulokset katkaistaan ja vain etumerkkibitti ja neljä eniten merkitsevää bittiä säilytetään.

Laske kvantisoidun järjestelmän vaste (a)-kohdan sisäänmenolle. Piirrä sekä (a)- että (b)-kohtien järjestelmien vasteet, kun $0 \leq n \leq 5$. Vertaa järjestelmien vasteita kun n on suuri.

(c) Tarkastellaan kuvan 34 mukaista järjestelmää, jonka sisäänmenona on

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{2}(-1)^n, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Toista (a)- ja (b)-kohdat tässä tapauksessa.



Kuva 34. Tehtävän 24 toinen järjestelmä.

24(a):

Kuvan 33 järjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

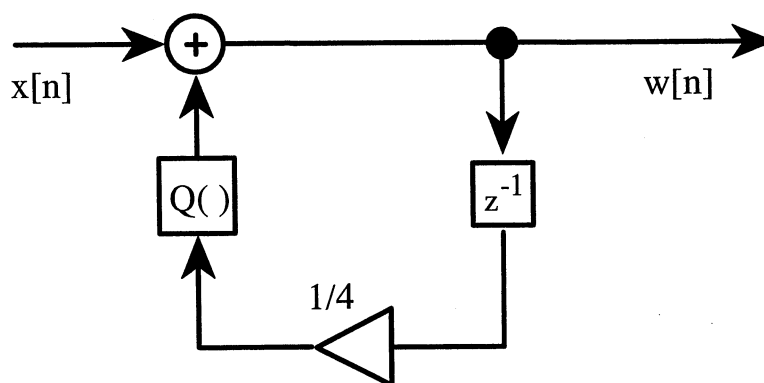
Herätteen $x[n] = \frac{1}{2}u[n]$ z -muunnos on $X(z) = \frac{1}{2}/(1 - z^{-1})$. Vasteen z -muunnos on $Y(z) = H(z)X(z)$, joka voidaan paloitella osamurtokehitelmän avulla seuraavasti (osaat jo varmaan tässä vaiheessa):

$$Y(z) = \frac{1/2}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 - z^{-1})} = \frac{-1/6}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})} + \frac{2/3}{1 - z^{-1}}.$$

$$\Rightarrow y[n] = (-\frac{1}{6}(1/4)^n + 2/3)u[n].$$

Kun $n \rightarrow \infty$, $y[n] \rightarrow 2/3$.

24(b): Kuvassa 35 on esitetty käsiteltävän järjestelmän toteutus, jossa käytetään äärellistä sananpituutta.



Kuva 35. Tehtävän 24 ensimmäinen järjestelmän äärellisen sananpituuden toteutus.

Ennen kuin $\frac{1}{4}w[n]$ summataan $x[n]$:ään, sen itseisarvo katkaistaan neljään bittiin. $Q(\)$ kuvaa tätä toimenpidettä. Järjestelmää kuvaava epälineaarinen

differenssiyhtälö on täten

$$w[n] = Q\left(\left[\frac{1}{4}w[n-1]\right]\right) + x[n].$$

Olettamalla $w[n] = 0, n < 0$ saadaan herätteen $x[n] = 1/2u[n]$ vasteeksi $w[n]$:

$$w[0] = Q\left(\frac{1}{4}w(-1)\right) + x[0] = Q(00000) + 1/2 = 1/2$$

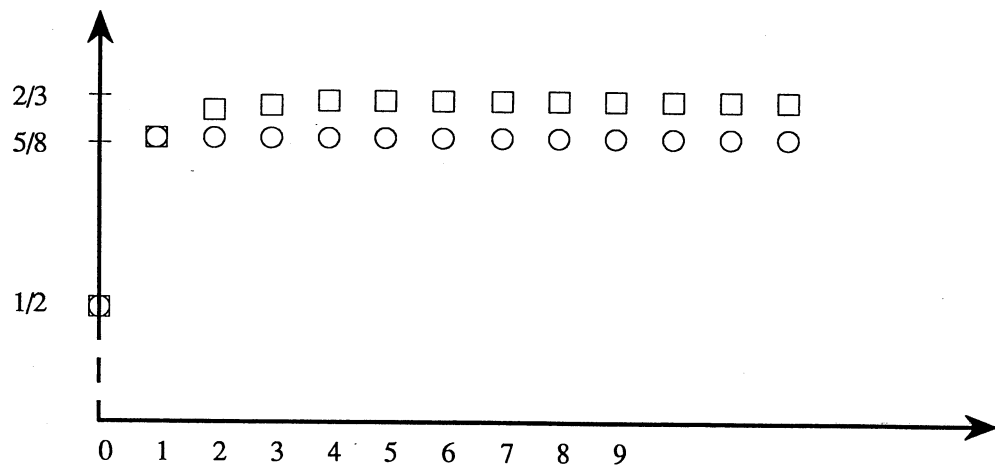
$$w[1] = Q\left(\frac{1}{4}w[0]\right) + x[1] = Q(1/8) + 1/2 = Q(00010) + 1/2 = 1/8 + 1/2 = 5/8$$

$$w[2] = Q(5/32) + x[2] = Q(000101) + 1/2 = 00010 + 1/2 = 1/8 + 1/2 = 5/8$$

$$w[3] = Q(5/32) + 1/2 = 5/8$$

$$w[n] = 5/8, \quad n \geq 4.$$

Kuvassa 36 on esitetty sekä tarkan että äärellisen sanapituuden järjestelmän vasteet.



Kuva 36. Tarkan (neliö) ja äärellisen sanapituuden (ympyrä) järjestelmän vasteet.

24(c):

Kuvassa 34 esitetyn järjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

Herätteen $x[n] = \frac{1}{2}(-1)^n u[n]$ z -muunnos on puolestaan

$$X(z) = \frac{1/2}{1 + z^{-1}},$$

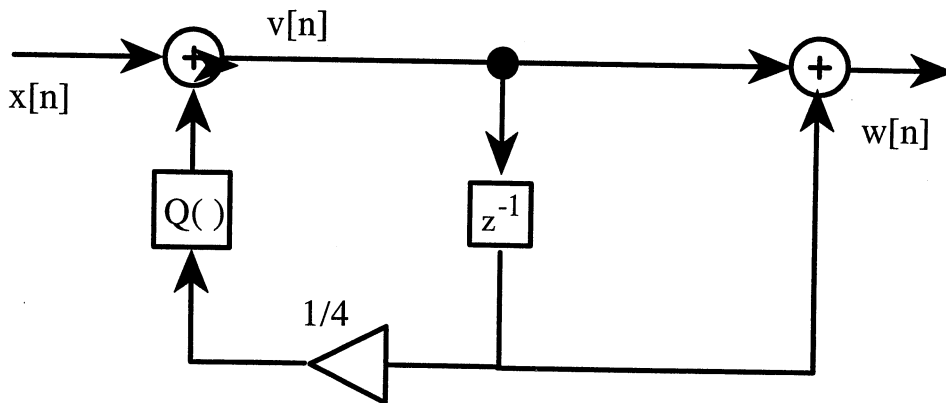
joten vasteen z -muunnokseksi tulee

$$Y(z) = \frac{\frac{1}{2}(1 + z^{-1})}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1})(1 + z^{-1})} = \frac{1/2}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}}.$$

$$\Rightarrow y[n] = \frac{1}{2}(1/4)^n u[n].$$

Kun $n \rightarrow \infty$, $y[n] \rightarrow 0$.

Kuvassa 37 on esitetty äärellisen sananpituuden järjestelmä.



Kuva 37. Tehtävän 24 toisen järjestelmän äärellisen sananpituuden toteutus.

$H(z) = (1 + z^{-1}) / (1 - \frac{1}{4}z^{-1}) \Rightarrow$ Tarkan järjestelmän differenssiyhtälö on

$$y[n] = \frac{1}{4}y[n - 1] + x[n] + x[n - 1].$$

Äärellisen sananpituuden järjestelmää kuvaavat puolestaan differenssiyhtälöt

$$v[n] = Q\left(\frac{1}{4}v[n - 1]\right) + x[n]$$

$$w[n] = v[n] + v[n - 1].$$

Olettamalla $v[n] = 0$, $n < 0$ saadaan herätteen $x[n] = \frac{1}{2}(-1)^n u[n]$ vasteeksi $w[n]$:

$$v[0] = Q\left(\frac{1}{4}v(-1)\right) + 1/2 = 0 + 1/2 = 1/2$$

$$\Rightarrow w[0] = v[0] + v[-1] = 1/2$$

$$v[1] = Q\left(\frac{1}{4}v[0]\right) - 1/2 = 1/8 - 1/2 = -3/8$$

$$\Rightarrow w[1] = v[1] + v[0] = -3/8 + 1/2 = 1/8$$

$$v[2] = Q\left(\frac{1}{4}v[1]\right) + 1/2 = Q(-3/32) + 1/2 = Q(100011) + 1/2$$

$$= 10001 + 1/2 = -1/16 + 1/2 = 7/16$$

$$\Rightarrow w[2] = v[2] + v[1] = 7/16 - 3/8 = 1/16$$

$$v[3] = Q\left(\frac{1}{4}v[2]\right) - 1/2 = Q(7/64) - 1/2 = Q(0000111) - 1/2$$

$$= 00001 - 1/2 = 1/16 - 1/2 = -7/16$$

$$\Rightarrow w[3] = v[3] + v[2] = -7/16 + 7/16 = 0$$

$$v[4] = Q\left(\frac{1}{4}(-7/16)\right) + 1/2 = Q(-7/64) + 1/2 = -v[3] = 7/16$$

$$\Rightarrow w[4] = v[4] + v[3] = 0$$

$$v[5] = Q\left(\frac{1}{4}(7/16)\right) - 1/2 = v[3] = -v[4] = -7/16$$

$$\Rightarrow w[5] = v[5] + v[4] = 0$$

$$v[6] = Q\left(\frac{1}{4}(-7/16)\right) + 1/2 = v[4] = 7/16$$

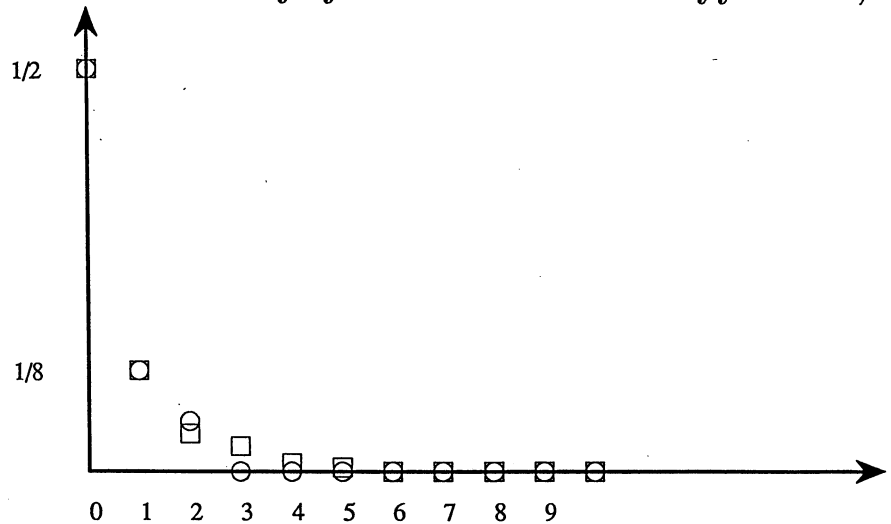
$$v[7] = Q\left(\frac{1}{4}(7/16)\right) - 1/2 = v[3] = -7/16.$$

Havaitaan, että

$$v[n] = \begin{cases} 7/16, & n \text{ parillinen, } n \geq 4 \\ -7/16, & n \text{ pariton, } n \geq 3. \end{cases}$$

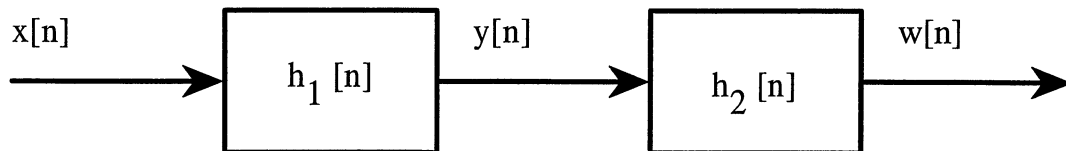
$$\Rightarrow w[n] = 0, n \geq 4.$$

Kuvassa 38 on esitetty tarkan järjestelmän ja äärellisen sananpituuden järjestelmän vasteet. Äärellisen sananpituuden järjestelmän vaste menee nol-
laan jo, kun $n = 3$, kun taas tarkan järjestelmän vaste lähestyy nol-
laa, kun n lähestyy ääretöntä.



Kuva 38. Tarkan (neliö) ja äärellisen sananpituuden (ympyrä) järjestelmän vas-
teet.

Tehtävä 25: Olkoon $x[n]$ valkoista kohinaa, jonka keskiarvo on nolla ja vari-
anssi on σ_x^2 . Olkoon $x[n]$ kuvan 39 mukaisen kahden lineaarisen siirtoinvariantin
järjestelmän kaskadikytkennän sisäänmenona.



Kuva 39. Tehtävän 25 järjestelmä.

(a) Onko

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k]?$$

(b) Onko

$$\delta_w^2 = \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k]?$$

(c) Olkoon $h_1[n] = a^n u[n]$ ja $h_2[n] = b^n u[n]$. Määrää kokonaisjärjestelmän yksikkönäytevaste sekä tämän avulla σ_w^2 . Jos vastauksesi (b)-kohtaan oli kyllä, onko se yhtäpitävä (c)-kohdan vastauksen kanssa?

Jos $P_{xx}(\omega)$ on suodattimen sisäänmenon tehotiheysspektri, niin ulostulon tehotiheysspektri on

$$P_{yy}(\omega) = |H(e^{j\omega})|^2 P_{xx}(\omega).$$

Ulostulon varianssi eli keskimääräinen teho σ_y^2 saadaan integraalista

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_{yy}(\omega) d\omega$$

Jos sisäänmeno on valkoista kohinaa eli $P_{xx}(\omega) \equiv \sigma_x^2$, saa edellinen yhtälö muodon

$$P_{yy}(\omega) = \sigma_x^2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2(k),$$

missä $h[n]$ on järjestelmä impulssivaste. Tämä seuraa suoraan Parsevalin teoreemasta, jonka mukaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega})|^2 d\omega = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h^2[k].$$

25(a): Koska ensimmäisen järjestelmän sisäänmenona on valkoista kohinaa, on ulostulon varianssi

$$\sigma_y^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k].$$

25(b): Toisen järjestelmän sisäänmenon tehotiheyspektri on

$$P_{yy}(\omega) = \sigma_x^2 |H_1(e^{j\omega})|^2,$$

missä $H_1(e^{j\omega})$ on ensimmäisen järjestelmän taajuusvaste. Koska sisäänmeno ei ole valkoista kohinaa ($P_{yy}(\omega)$ ei ole vakiofunktio),

$$\sigma_w \neq \sigma_y^2 \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k].$$

25(c): Kokonaisjärjestelmän siirtofunktio on

$$H(z) = H_1(z)H_2(z) = \frac{1}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}.$$

$$A = \frac{1}{1 - bz^{-1}} \Big|_{z=a} = \frac{-a}{b - a}$$

$$B = \frac{1}{1 - az^{-1}} \Big|_{z=b} = \frac{b}{b - a}$$

$$\Rightarrow H(z) = \frac{1}{b - a} \left[\frac{-a}{1 - az^{-1}} + \frac{b}{1 - bz^{-1}} \right]$$

$$\Rightarrow h[k] = \frac{1}{(b - a)} \left[-a \cdot a^k b \cdot b^k \right] u[k]$$

$$\Rightarrow h^2[k] = \frac{1}{(b - a)^2} \left[a^2 \cdot a^{2k} - 2ab \cdot (ab)^k + b^2 \cdot b^{2k} \right] u[k].$$

$$\sigma_w^2 = \sigma_x^2 \sum_{k=1}^{\infty} h^2[k] = \frac{\sigma_x^2}{(b - a)^2} \left[a^2 \sum_{k=0}^{\infty} a^{2k} - 2ab \sum_{k=1}^{\infty} (ab)^k + b^2 \sum_{k=0}^{\infty} b^{2k} \right]$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{(b - a)^2} \left[\frac{a^2}{1 - a^2} - \frac{2ab}{1 - ab} + \frac{b^2}{1 - b^2} \right]$$

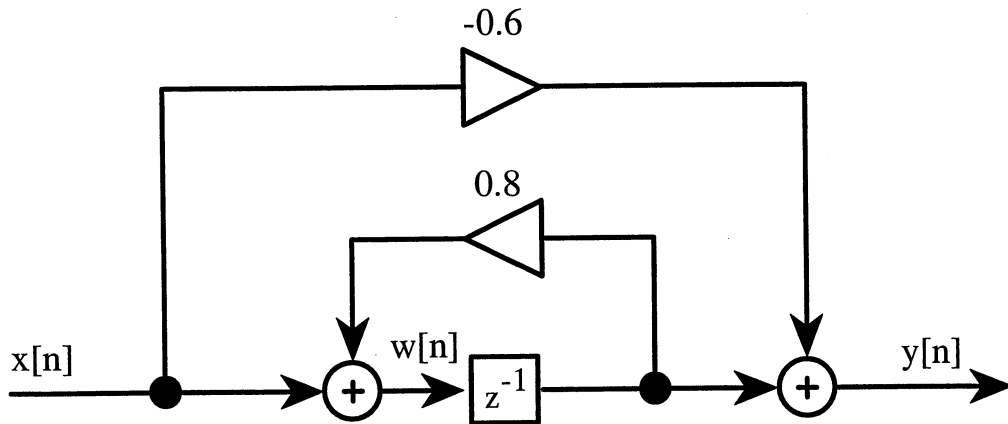
$$= \frac{\sigma_x^2}{(b - a)^2} \left[\frac{a^2}{1 - a^2} - \frac{ab}{1 - ab} + \frac{b^2}{1 - b^2} - \frac{ab}{1 - ab} \right]$$

$$= \frac{\sigma_x^2}{(b - a)^2} \left[\frac{a(a - b)}{(1 - ab)(1 - a^2)} + \frac{b(b - a)}{(1 - ab)(1 - b^2)} \right]$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\sigma_x^2(b-a)}{(b-a)^2(1-ab)} \left[\frac{-a(1-b^2) + b(1-a^2)}{(1-a^2)(1-b^2)} \right] \\
 &= \frac{\sigma_x^2(b-a)(1+ab)}{(b-a)(1-ab)(1-a^2)(1-b^2)} = \frac{\sigma_x^2(1+ab)}{(1-ab)(1-a^2)(1-b^2)}.
 \end{aligned}$$

Tehtävä 26: Kuvan 40 mukainen suodatin toteutetaan käyttäen kiinteäpilkkuista esitystä ja 1+8 bitin laskentatarkkuutta.

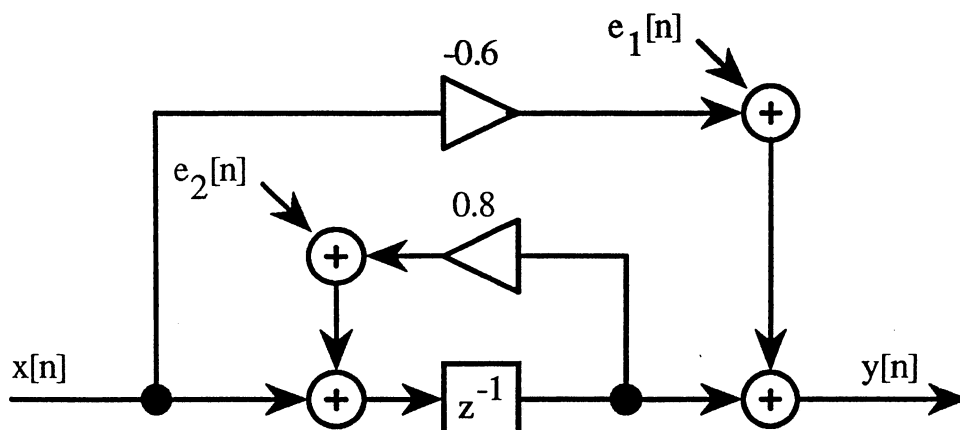
- (a) Laske pyörästyskohinan varianssi suodattimen ulostulossa.
- (b) Suodattimen sisäänmenoon kytketään signaali $x[n] = A \sin(n\pi/10)$. Laske suurin amplitudi A , jolla ei tapahdu ylivuotoja. Laske signaali-kohina -suhde suodattimen ulostulossa tällä A :n arvolla.



Kuva 40. Tehtävän 26 suodatin.

26(a): Kuvassa 41 on esitetty äärellisen sananpituuden toteutus tehtävän järjestelmälle, missä kertolaskujen tulosten pyörästystä on mallinnettu kohinälähteinä $e_1[n]$ ja $e_2[n]$, joiden keskiarvot ovat nollia ja varianssit ovat

$$\sigma_{e_1}^2 = \sigma_{e_2}^2 = \frac{2^{-2b}}{12} = \frac{2^{-16}}{12}.$$



Kuva 41. Tehtävän 26 suodattimen äärellisen sananpituuden toteutus.

Pyörityskohinan varianssi ulostulossa on

$$\sigma_f^2 = \frac{2^{-16}}{12} \left(\sum_{k=0}^{\infty} h_1^2[k] + \sum_{k=0}^{\infty} h_2^2[k] \right),$$

missä $h_1[k]$ ja $h_2[k]$ ovat impulssivasteet kohinalähteitä $e_1[n]$ ja $e_2[n]$ ulostuloon.

Vastaavat siirtofunktiot ovat

$$H_1(z) = 1$$

ja

$$H_2(z) = \frac{z^{-1}}{1 - (8/10)z^{-1}}.$$

Tästä seuraa

$$h_1[n] = \delta[n] \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = 1$$

ja

$$\begin{aligned} h_2[n] &= (8/10)^{n-1} u[n-1] \\ \Rightarrow h_2^2[n] &= ((8/10)^2)^{n-1} u[n-1] \\ \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] &= \frac{1}{1 - (8/10)^2} = 2.778 \end{aligned}$$

Kokonaiskohina ulostulossa on näin ollen

$$\sigma_f^2 = (1 + 2.778) \frac{2^{-16}}{12} = 3.778 \frac{2^{-16}}{12}.$$

26(b):

$$x[n] = A \sin\left(\frac{\pi}{10}n\right).$$

Ylivuotoja ei esiinny mikäli kuvan 41 jonojen $w[n]$ ja $y[n]$ itseisarvot ovat pienempiä kuin yksi kaikilla n :n arvoilla. $w[n]$ ja $y[n]$ voidaan esittää seuraavissa muodoissa

$$w[n] = A|H'(e^{j\pi/10})| \sin\left(\frac{\pi}{10}n + \arg H'(e^{j\pi/10})\right)$$

ja

$$y[n] = A|H(e^{j\pi/10})| \sin\left(\frac{\pi}{10}n + \arg H(e^{j\pi/10})\right),$$

missä

$$H'(z) = \frac{z^{-1}}{1 - (8/10)z^{-1}}$$

ja

$$H(z) = H'(z) - 0.6 = \frac{-0.6 + 1.48z^{-1}}{1 - (8/10)z^{-1}}$$

ovat $w[n]$:n ja $x[n]$:n ja $y[n]$:n ja $x[n]$:n väliset siirtofunktiot.

Vatimuksena on täten, että

$$A|H'(e^{j\pi/10})| < 1 \quad \text{and} \quad A|H(e^{j\pi/10})| < 1,$$

eli

$$A < \min\{1/|H'(e^{j\pi/10})|, 1/|H(e^{j\pi/10})|\}.$$

$$\begin{aligned} |H'(e^{j\pi/10})| &= \frac{|\cos(\pi/10) - j \sin(\pi/10)|}{|1 - 0.8[\cos(\pi/10) - j \sin(\pi/10)]|} \\ &= \frac{1}{|0.2392 + j0.2472|} = 2.907 \end{aligned}$$

ja

$$|H(e^{j\pi/10})| = \frac{|-0.6 + 1.48[\cos(\pi/10) - j \sin(\pi/10)]|}{|1 - 0.8[\cos(\pi/10) - j \sin(\pi/10)]|}$$

$$= \frac{|0.8076 - j0.4573|}{|0.2392 + j0.2472|} = 2.698.$$

⇒ Ylivuotoja ei tapahdu, jos $A_{\max} < 1/2.907 = 0.3440$.

Suodattimen ulostulossa herätteen $x[n] = A_{\max} \sin(\frac{\pi}{10}n)$ vasteen amplitudi on

$$A_{\max}|H(e^{j\pi/10})| = 0.3440 \cdot 2.698 = 0.9281.$$

Tämän signaalin teho on

$$A^2/2 = 0.4307,$$

kun taas kertolaskujen tulosten pyöristyksestä aiheutuva kohina on

$$\sigma_f = 3.778 \frac{2^{-16}}{12}.$$

Signaali-kohina -suhde on täten

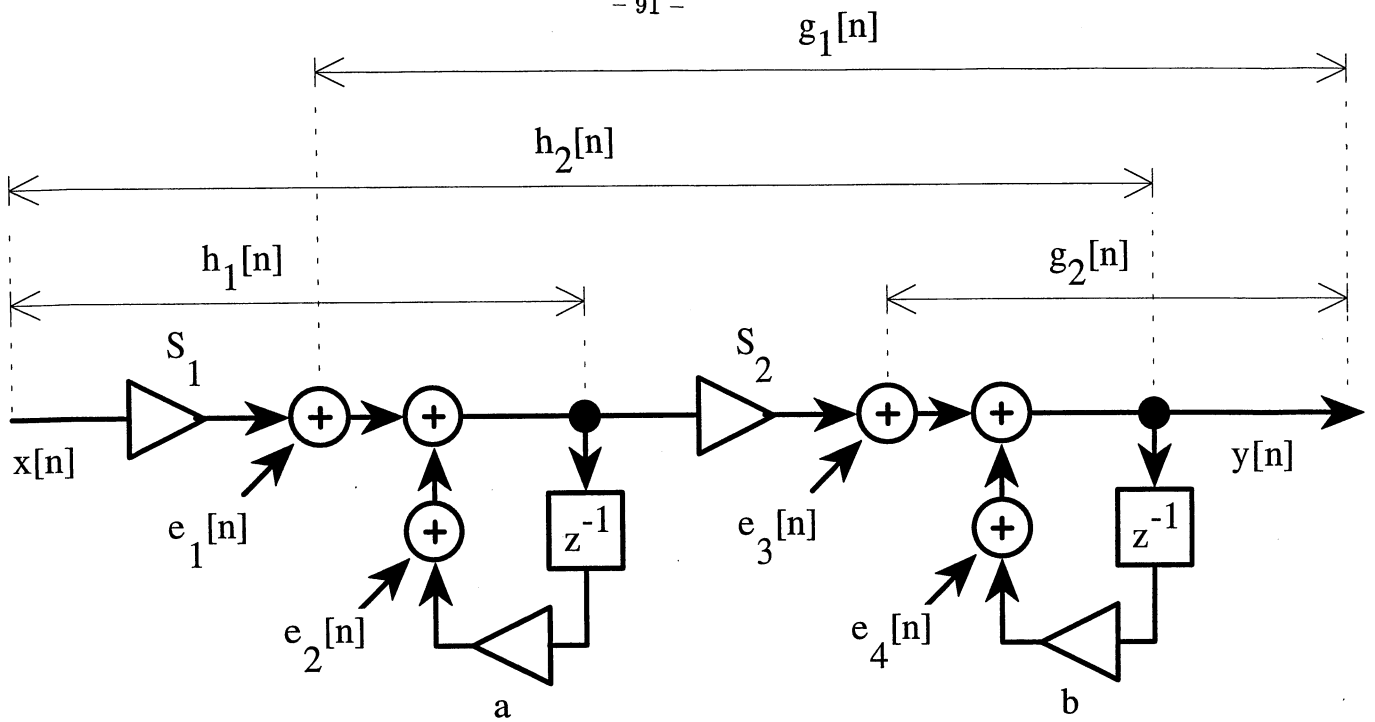
$$S/N \text{ [dB]} = 10 \cdot \log_{10} \frac{0.4307}{3.778 \cdot \frac{2^{-16}}{12}} = 49.5 \text{ dB}.$$

Tehtävä 27: Halutaan toteuttaa siirtofunktio

$$H(z) = \frac{0.02}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

käyttäen kiinteäpilkkuista aritmetiikkaa.

- (a) Suodatin toteutetaan kahden ensimmäisen asteen lohkon kaskadina. Skaalaa suodatin käyttäen turvallista (pahimman tapauksen) skaalausta ja valitse lohkojen järjestys siten, että pyöristyskohina minimoituu. Toista tehtävä L_{∞} - ja L_2 -normien mukaisissa skaalauksissa.
- (b) Suodatin toteutetaan suoraan toisen asteen lohkona. Skaalaa suodatin ja laske pyöristyskohina.



Kuva 42. Tehtävän 27 suodattimen äärellisen sananpituuden toteutus, jossa on mukana skaalauskerroimet ja kertolaskujen tulosten pyöristyksestä aiheutuvat kohinalähteet.

27(a):

Kuvassa 42 on esitetty halutut skaalauskerroimet sekä kohinalähteet. Käytettäessä kakkosen komplementtiaritmetiikka kriittisiä pisteitä skaalauksen suhteen ovat summausten ulostulot. Jos on useita summauksia peräkkäin tarkastellaan kokonaissumman ulostuloa, jossa ei saisi tapahtua ylivuotoa (lukualueen $[-1, 1)$ ylistystä tai alitusta). Kuvassamme $h_1[n]$ ja $h_2[n]$ ovat skaalaussiirtofunktioiden impulssivasteet sisäänmenosta kriittisiin pisteisiin. $g_1[n]$ ja $g_2[n]$ ovat puolestaan kohinasiirtofunktioiden impulssivasteet. $g_1[n]$ on impulssivaste kohinalähteistä $e_1[n]$ ja $e_2[n]$ ulostuloon. Havaitse, että myös skaalauskerroimet aiheuttavat kohinaa. Huomaa se, että myös skaalauskerroimet aiheuttavat kohinaa. $g_2[n]$ on puolestaan impulssivaste kohinalähteistä $e_3[n]$ ja $e_4[n]$ ulostuloon.

Tarkastellaan ensin skaalausfunktioita, joita käytetään myöhemmin hyväksi:

$$h_1(n) = S_1 a^n u[n]$$

$$\begin{aligned} Z(h_2[n]) = H_2(z) &= \frac{S_1 S_2}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})} \\ &= \frac{S_1 S_2}{1 - a/b} \frac{1}{1 - bz^{-1}} + \frac{S_1 S_2}{1 - b/a} \frac{1}{1 - az^{-1}} \end{aligned}$$

⇒

$$h_2[n] = \frac{S_1 S_2}{b - a} (b^{n+1} u[n] - a^{n+1} u[n]).$$

Laskettaessa ulostulon kohinaa havaitaan se, että impulssivaste kohinalähteistä $e_1[n]$ ja $e_2[n]$ ulostuloon on sama ($g_1[n]$). Samoin $e_3[n]$:llä ja $e_4[n]$:llä on sama impulssivaste ($g_2[n]$). Kokonaiskohina ulostulossa on

$$\sigma_f^2 = 2\sigma_e^2 \sum_{n=0}^{\infty} (g_1^2[n] + g_2^2[n])$$

$$g_1[n] = h_2[n]/S_1$$

⇒

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} g_1^2[n] &= \left(\frac{S_2}{b-a}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (b^{n+1} - a^{n+1})^2 \\ &= \left(\frac{S_2}{b-a}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} [(b^2)^{n+1} + (a^2)^{n+1} - (ab)^{n+1}] \\ &= \left(\frac{S_2}{b-a}\right)^2 \left[\frac{b^2}{1-b^2} + \frac{a^2}{1-a^2} - \frac{2ab}{1-ab} \right] \\ &= 89.81 S_2^2 \quad \text{kun } a = 0.8, b = 0.9 \text{ tai } a = 0.9, b = 0.8. \end{aligned}$$

Lohkojen järjestys ei siis vaikuta tähän suureen.

$$g_2[n] = b^n u[n]$$

⇒

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_2^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} (b^2)^n = \frac{1}{1-b^2}$$

Kokonaiskohana on täten

$$\sigma_f^2 = \sigma_e^2 \left(179.6 S_2^2 + \frac{2}{1-b^2} \right).$$

Tarkastellaan ensin turvallista (pahimman tapauksen) skaalausta, jossa kertoimet S_1 ja S_2 valitaan siten, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = \sum_{n=0}^{\infty} |h_2[n]| = 1.$$

Tässä tapauksessa ei tapahdu koskaan ylivuotoja.

Tapaus: $a = 0.9$ ja $b = 0.8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = S_1 \sum_{n=0}^{\infty} 0.9^n = S_1 \frac{1}{1-0.9} = 10S_1 = 1$$

⇒

$$S_1 = 0.1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_2[n]| = 10S_1 S_2 \sum_{n=0}^{\infty} |0.8^{n+1} - 0.9^{n+1}|$$

$$= 10S_1 S_2 \sum_{n=0}^{\infty} (0.9^{n+1} - 0.8^{n+1})$$

$$= S_2 \left(\frac{0.9}{1-0.9} - \frac{0.8}{1-0.8} \right) = 5S_2 = 1$$

⇒

$$S_2 = 0.2.$$

Saadaan

$$\sigma_f^2 = 12.74\sigma_e^2.$$

Tapaus: $a = 0.8$ ja $b = 0.9$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = 5S_1 = 1$$

⇒

$$S_1 = 0.2.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_2[n]| = 10S_1S_2 \cdot 5 = 10S_2 = 1$$

⇒

$$S_2 = 0.1.$$

Saadaan

$$\sigma_f^2 = 12.32\sigma_e^2.$$

Järjestys $a = 0.8$, $b = 0.9$ on täten hiukan parempi. Koska molemmissa järjestyksissä $S_1S_2 = 0.02$, suodattimen ulostulossa ei tarvita ylimääräistä skaalauskerrointa tekemään siitofunktion nimittäjäpolynomin 0.02:ksi.

Tarkastellaan seuraavaksi L_∞ -normin mukaista skaalausta, jossa S_1 ja S_2 määrätään siten, että

$$\max_{\omega \in [0, \pi]} |H_1(e^{j\omega})| = 1$$

ja

$$\max_{\omega \in [0, \pi]} |H_2(e^{j\omega})| = 1,$$

jossa

$$H_1(z) = \frac{S_1}{(1 - az^{-1})}$$

ja

$$H_2(z) = \frac{S_1S_2}{(1 - az^{-1})(1 - bz^{-1})}.$$

Tässä tapuksessa mikään yksittäinen sinimuotoinen signaali ei aiheuta ylivuotoja. Sekä $|H_1(e^{j\omega})|$:n ja $|H_2(e^{j\omega})|$:n maksimiarvo saavutetaan nollataajuudella $\omega = 0$. Tästä syystä vaaditaan, että $H_1(1) = S_1/(1 - a) = 1$ ja $H_2(1) = S_1 S_2 / [(1 - a)(1 - b)] = 1$. Vaaditut skaalauskerroimet ovat $S_1 = (1 - a)$ and $S_2 = (1 - b)$, jotka ovat samat kuin turvallisen skaalauksen yhteydessä. Edellä esitetyt tulokset pahimman tapuksen skaalukselle pätevät näin ollen myös L_∞ -normin mukaiselle skaalaukselle. Selityksenä on se, että pahin sisäänmeno signaali turvalliselle skaalaukselle on $x[n] = u[n]$ tai $x[n] = -u[n]$, jotka ovat sinisignaaleja joiden värahtelytaajuus on $\omega = 0$.

Tarkastellaan lopuksi L_2 -normin mukaista skaalausta, jossa kertoimet S_1 ja S_2 valitaan siten, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] = 1.$$

Tässä tapauksessa ylivuotoja voi tapahtua. Jos sisäänmenosignaali on riittävän satunnainen, ylivuodot ovat kuitenkin epätodennäköisiä.

Tapaus: $a = 0.9$ ja $b = 0.8$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = S_1^2 \frac{1}{1 - 0.9^2} = 5.263 S_1^2 = 1$$

\Rightarrow

$$S_1 = 0.4359.$$

Edellisten tulosten perusteella

$$h_2[n] = S_1 g_1[n] \quad \text{ja} \quad \sum_{n=0}^{\infty} g_1^2[n] = 89.81 S_2^2.$$

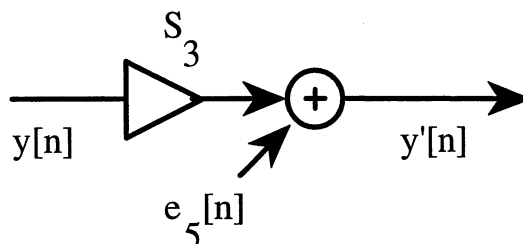
Täten

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] = S_1^2 S_2^2 89.81 = 17.06 S_2^2 = 1$$

⇒

$$S_2 = 0.2421.$$

Jotta siirtofunktion nimittäjän vakiokerroin olisi 0.02, tarvitaan ulostuloon lisäkerroin kuvan 43 mukaisella tavalla.



Kuva 43. Ylimääräisen skaalauskerroimen lisääminen suodattimen ulostuloon L_2 -normin mukaisen skaalauksen yhteydessä.

Valitaan S_3 siten, että $S_1 S_2 S_3 = 0.02$

$$\Rightarrow S_3 = 0.1895.$$

Ulostulon kohina on nyt

$$\begin{aligned} (\sigma'_f)^2 &= \sigma_e^2 + S_3^2 \sigma_f^2 \\ &= \sigma_e^2 \left(1 + S_3^2 \left(179.62 S_2^2 + \frac{2}{1-b^2} \right) \right) = 1.578 \sigma_e^2. \end{aligned}$$

Tapaus: $a = 0.8$ ja $b = 0.9$:

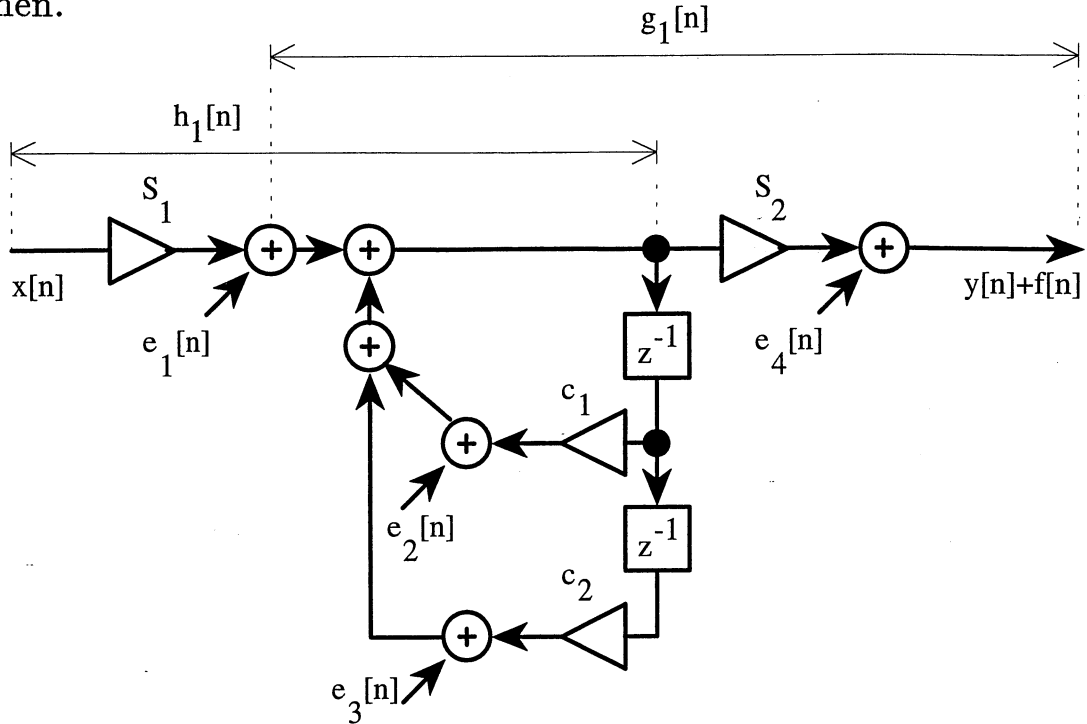
Saadaan $S_1 = 0.6$, $S_2 = 0.1759$, $S_3 = 0.1895$ ja

$$(\sigma'_f)^2 = 1.578 \sigma_e^2.$$

Järjestyksellä ei ole näin ollen vaikutusta ulostulokohinaan.

Havaitaan, että jälkimmäisellä skaalaustavalla saavutetaan noin 8 dB pienempi ulostulon kohinatase turvalliseen ja L_∞ -normin mukaiseen skaalaukseen verrattuna. Tällöin ylivuodot ovat mahdollisia, joskin niiden todennäköisyys on verraten pieni varsinkin jos sisäänmenosignaali on riittävän satunnainen.

27(b):



Kuva 44. Tehtävän 27 suodattimen suoramuoitoinen äärellisen sananpituuden toteutus, jossa on mukana skaalauskerroimet ja kertolaskujen tulosten pyöristyksestä aiheutuvat kohinalähteet.

Kuvassa 44 on esitetty tarkasteltavan siirtofunktion suoramuoitoinen äärellisen sananpituuden toteutus, missä $c_1 = 1.7$ ja $c_2 = -0.72$. Kokonaissiirtofunktio on tässä tapauksessa

$$H(z) = \frac{0.02}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})} = \frac{0.02}{(1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-1})}$$

Skaalaussiirtofunktio on

$$H_1(z) = \frac{S_1}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.8z^{-1})}$$

$$= \frac{9S_1}{1 - 0.9z^{-1}} - \frac{8S_1}{1 - 0.8z^{-1}}$$

\Rightarrow

$$h_1[n] = 10S_1(0.9^{n+1}u[n] - 0.8^{n+1})u[n].$$

Tarkastellaan ensin turvallista skaalausta, jossa kerroin S_1 valitaan siten, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h_1[n]| = 10S_1 \sum_{n=0}^{\infty} |0.9^{n+1} - 0.8^{n+1}|$$

$$= 10S_1 \left(\frac{0.9}{1 - 0.9} - \frac{0.8}{1 - 0.8} \right) = 50S_1 = 1$$

\Rightarrow

$$S_1 = 0.02$$

$S_1S_2 = 1 \Rightarrow S_2 = 1$. Koska $S_2 = 1$, tätä kerrointa ei käytetä toteutuksessa. Samaten kohinalähde $e_4[n]$ on poissa.

Tarkastellaan seuraavaksi L_∞ -normin mukaista skaalausta, jossa S_1 määrätään siten, että

$$\max_{\omega \in [0, \pi]} |H_1(e^{j\omega})| = H_1(1) = \frac{S_1}{0.1 \cdot 0.2} = 1.$$

\Rightarrow

$$S_1 = 0.02.$$

Jälleen skaalauskerroimet turvallisella skaalaukselle ja L_∞ -normin mukaiselle skaalaukselle ovat samat.

Tarkastellaan lopuksi L_2 -normin mukaista skaalausta, jossa S_1 määrätään siten, että

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = 100S_1^2 = 100S_1^2 \left[\frac{0.81}{1 - 0.81} + \frac{0.64}{1 - 0.64} - \frac{1.44}{1 - 0.72} \right] = 89.81S_1^2 = 1$$

- 99 -

\Rightarrow

$$S_1 = 0.1055.$$

$$S_1 S_2 = 0.02$$

\Rightarrow

$$S_2 = 0.1895.$$

Tarkastellaan seuraavaksi ulostulokohinaa. Kohinasiirtofunktio kohinalähteistä $e_k[n]$, $k = 1, 2, 3$ ulostuloon on

$$G_1(z) = \frac{S_2}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 0.8z - 1)}.$$

Koska $G_1(z) = (S_2/S_1)H_1(z)$, saadan suoraan edellä lasketun $\sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] = 89.81S_1^2$ perusteella $\sum_{n=0}^{\infty} g_1^2[n] = 89.81S_2^2$. Ulostulokohinaksi saadaan sekä turvalliselle skaalaukselle että L_{∞} -normin mukaiselle skaalaukselle ($S_2 \equiv 1$ ja kohinalähde $e_4[n]$ on poissa)

$$\sigma_f^2 = 3\sigma_e^2 \cdot 89.81S_2^2 = 269.4\sigma_e^2$$

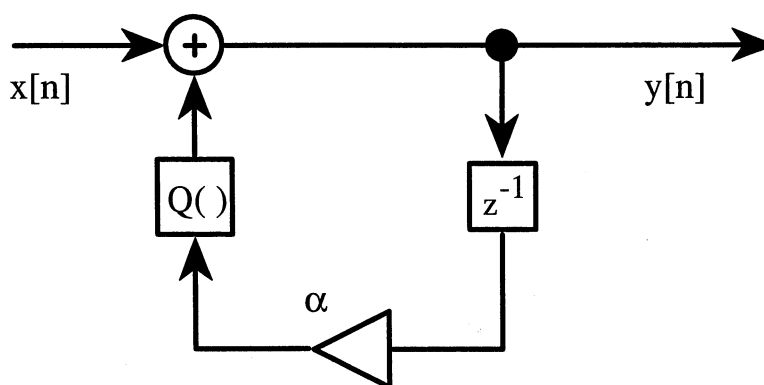
L_2 -normin mukaiselle skaalaustavlle ulostulokohina on puolestaan

$$\sigma_f^2 = 3\sigma_e^2 \cdot 89.81S_2^2 + \sigma_e^2 = 10.68\sigma_e^2.$$

Nähdään, että kumpaakin skaalaustapaa käytettäessä kaskadirakenne on huomattavasti parempi.

Tehtävä 28: Tarkastellaan kuvan 45 mukaista ensimmäisen asteen suodatinta. Kvantisoija $Q(\)$ esittää sitä tosiseikkaa, että kertolaskun $\alpha y[n - 1]$ tulos

pyöristetään. Kaikilla luvuilla on kiinteän pilkun esitykset sananpituuden ollessa $1 + b$ bittiä (yksi etumerkkibitti). Sisäänmeno on nolla, mutta suodattimen toiminta alkaa tietystä alkuehdosta : $y(-1) = A$. Kvantisoijan vaikutuksesta on olemassa tietty A :n arvoalue, *kuollut alue*, jossa α :n efektiivinen arvo on $+1$ tai -1 . Tällä alueella $|Q[\alpha A]| = |A|$. Kun ulostulo jotuu tälle alueelle, se oskilloi tai pysyy vakiona siippuen siitä, onko α :n efektiivinen arvo positiivinen vai negatiivinen.



Kuva 45. Tehtävän 28 äärellisen sananpituuden järjestelmä

- (a) Määrä α :n ja b :n avulla A :n arvoalue, joka vastaa kuollutta aluetta.
- (b) Kun $b = 6$ ja $A = 1/16$, piirrä $y[n]$ α :n arvoilla $\alpha = 15/16$ ja $\alpha = -15/16$.
- (c) Kun $b = 6$ ja $A = 1/2$, piirrä $y[n]$ α :n arvolla $\alpha = -15/16$.

28(a): Kuolleella alueella on voimassa

$$|Q(\alpha A)| = |A|$$

eli

$$|y[n]| = |Q(\alpha y[n-1])| = |y[n-1]| \quad (y[n-1] = A).$$

Pyöritykselle pätee puolestaan

$$|Q(\alpha y[n-1]) - \alpha y[n-1]| \leq \frac{1}{2} 2^{-b},$$

joten kuolleelle alueelle joudutaan kun

$$|\pm y[n-1] - \alpha y[n-1]| \leq \frac{1}{2}2^{-b},$$

missä +-merkki vastaa tilannetta, jossa α on positiivinen, ja --merkki tilannetta, jossa α on negatiivinen. Edellinen yhtälö voidaan täten lausua muodossa

$$\begin{aligned} |\pm [y[n-1] \mp |\alpha|y[n-1]]| &= |\pm (1 - |\alpha|)y[n-1]| \\ &= (1 - |\alpha|)|y[n-1]| \leq \frac{1}{2}2^{-b}. \end{aligned}$$

Havaitse, että $|\alpha| < 1$ stabiilille suodattimelle. Kuollut alue on siis

$$|A| = |y[n-1]| \leq \frac{\frac{1}{2}2^{-b}}{1 - |\alpha|}.$$

28(b): $b = 6$, $A = 1/16$, $\alpha = 15/16$. Kuolleella alueella

$$|A| \leq \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{64}}{\frac{1}{16}} = \frac{1}{8}, \quad [D]$$

joten lähtöarvo $y(-1) = A = 1/16$ on tällä alueella.

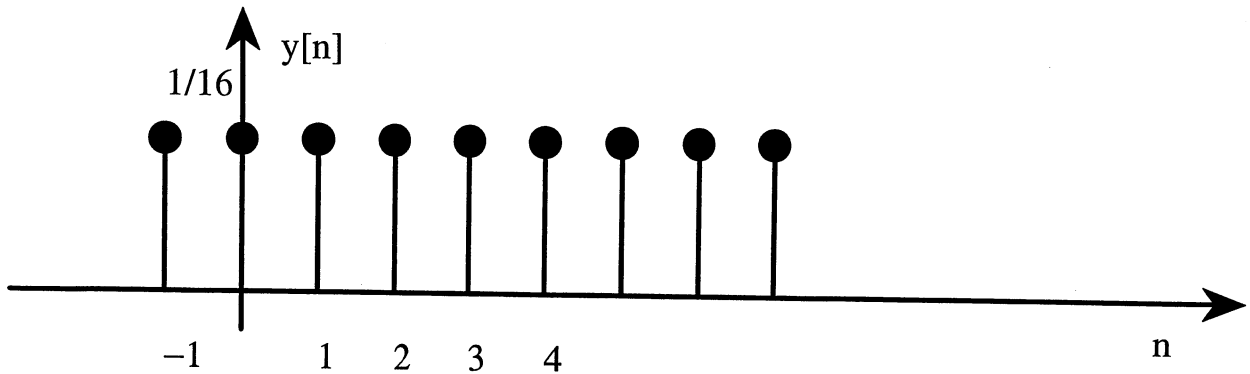
$$y[-1] = 1/16$$

$y[0]$:ksi saadan $b=6$:een bittiin pyörityksen jälkeen

$$\begin{aligned} y[0] &= Q(\alpha y(-1)) = Q(15/256) = Q(0_{\Delta}00001111) \\ &= 0_{\Delta}000100 = 1/16 \end{aligned}$$

$$y[1] = Q[\alpha y[0]] = Q(15/256) = 1/16$$

$$\Rightarrow 1/16, n \geq -1.$$



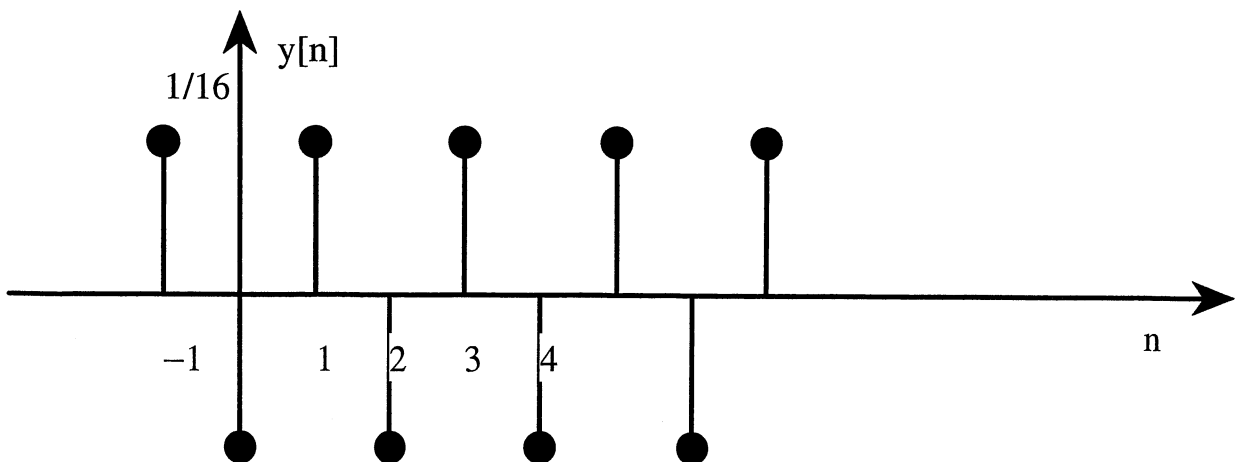
Kuva 46. Tehtävän 28(b) ulostulojono kun α on positiivinen
Kun $b = 6$, $A = 1/16$, $\alpha = -15/16$, on A kuolleella alueella $[D]$.

$$y[-1] = 1/16$$

$$\begin{aligned} y[0] &= Q(\alpha y[-1]) = Q(-15/256) = Q(1_{\Delta}0001111) \\ &= 1_{\Delta}000100 = -1/16 \end{aligned}$$

$$y[1] = Q(\alpha y[0]) = Q(15/256) = 1/16$$

$$\Rightarrow y[n] = (-1)^{n-1} 1/16, n \geq -1.$$



Kuva 47. Tehtävän 28(b) ulostulojono kun α on negatiivinen

28(c): $b = 6, A = 1/2, \alpha = -15/16$

$$y[-1] = 1/2$$

$$y[0] = Q(-15/32) = Q(1_{\Delta}011110) = -15/32$$

$$y[1] = Q(225/512) = Q(0_{\Delta}011100001) = 0_{\Delta}011100 = 7/16$$

$$y[2] = Q(-105/256) = Q(1_{\Delta}01101001) = 1_{\Delta}011010 = -13/32$$

$$y[3] = Q(195/512) = Q(0_{\Delta}011000101) = 0_{\Delta}011001 = 25/64$$

$$y[4] = Q(-375/1024) = Q(1_{\Delta}0101110111) = 1_{\Delta}010111 = -23/64$$

$$y[5] = Q(345/1024) = Q(0_{\Delta}0101011001) = 0_{\Delta}010110 = 9/32$$

$$y[6] = Q(-135/512) = Q(1_{\Delta}010000111) = 1_{\Delta}010001 = -17/64$$

$$y[7] = Q(255/1024) = Q(0_{\Delta}001111111) = 1/4$$

$$y[8] = Q(-15/64) = Q(1_{\Delta}001111) = -15/64$$

$$y[9] = Q(225/1024) = Q(0_{\Delta}0011100001) = 7/32$$

$$y[10] = Q(-105/512) = Q(1_{\Delta}001101001) = 1_{\Delta}001101 = -13/64$$

$$y[11] = Q(195/1024) = 3/16$$

$$y[12] = Q(-45/256) = -11/64$$

$$y[13] = Q(165/1024) = 5/32$$

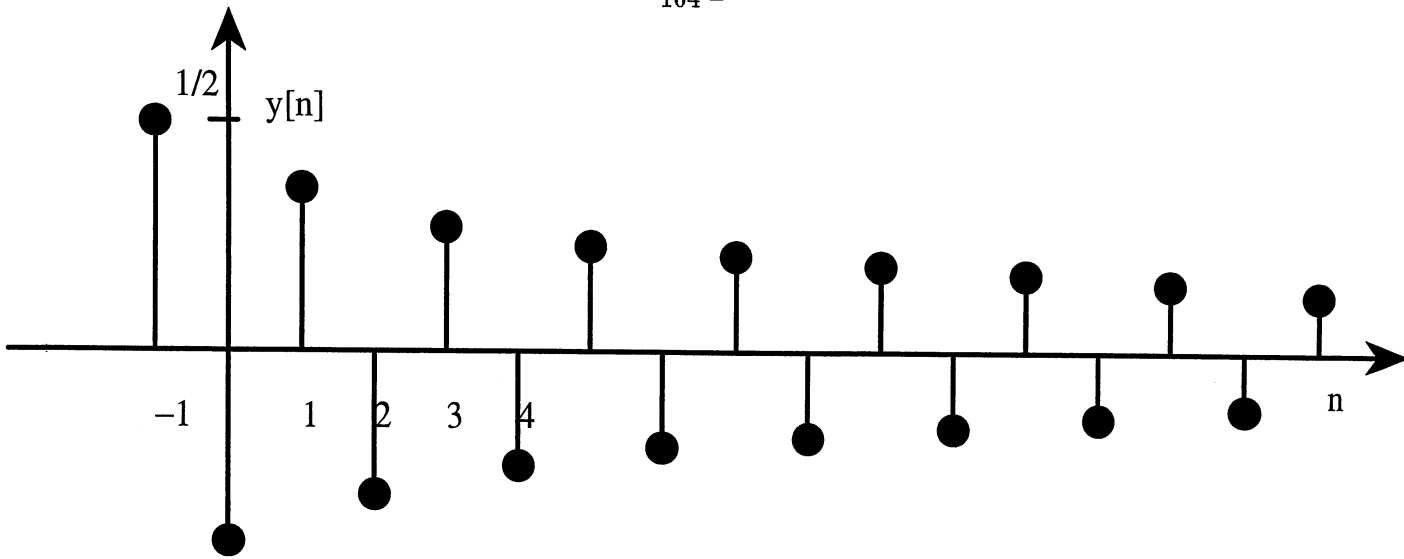
$$y[14] = Q(-75/512) = -9/64$$

$$y[15] = Q(135/1024) = 1/8$$

$$y[16] = Q(-15/128) = -1/8.$$

Päästiin vihdoinkin kuolleeseen alueeseen $|A| \leq 1/8$.

$$\Rightarrow y[n] = (-1)^{n-1}1/8, n \geq 15.$$



Kuva 48. Tehtävän 28(c) ulostulojono.

Tehtävä 29: FIR suodatin $(1 + \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2})(1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})$ toteutetaan käyttäen kahden toisen asteen ja yhden ensimmäisen asteen lohkon kaskadia. Luvuilla on kiinteän pilkun esitykset. Määrää lohkojen järjestys siten, että ulostulossa näkyvä pyöristyskohina on mahdollisimman pieni. Skaalaus jätetään yksinkertaisuuden vuoksi huomioimatta.

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$$

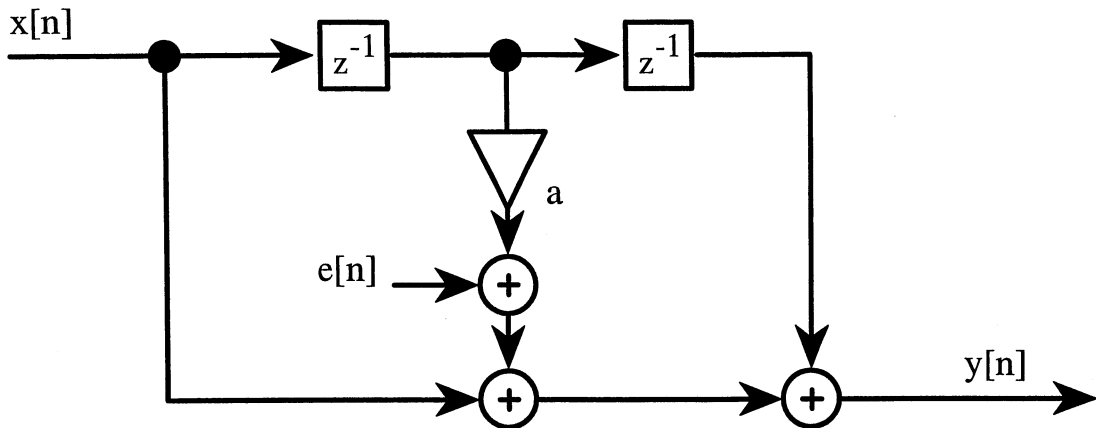
$$H_1(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_2(z) = 1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2}$$

$$H_3(z) = 1 + z^{-1}$$

$H(z)$ toteutetaan $H_1(z)$:n, $H_2(z)$:n ja $H_3(z)$:n kaskadikytkentänä. Ongelmana on näiden järjestyksen määrääminen siten, että ulostulossa näkyvä pyöristyskohina on mahdollisimman pieni.

Tarkastellaan eri lohkoissa syntyvää pyöristyskohinaa. Lohkot $H_1(z)$ ja $H_2(z)$ toteutetaan kuvan 49 mukaisesti ($a = 1/3$ $H_1(z)$:lle ja $a = -1/2$

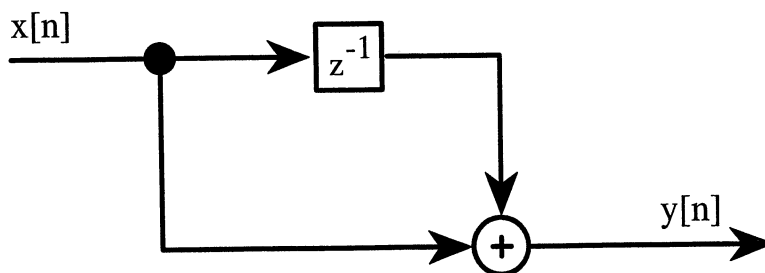


Kuva 49. $H_1(z)$:n ($a = 1/3$) ja $H_2(z)$:n ($a = 1/2$) äärellisen sananpituuden toteutus.

$H_2(z)$:lle). Kuten kuvasta havaitaan, aiheutuu pyöristykohinaa vain a :lla kertomisen seurauksena. Tämän oletetaan olevan valkoista kohinaa, jonka teho on (pyöristys b :hen bittiin)

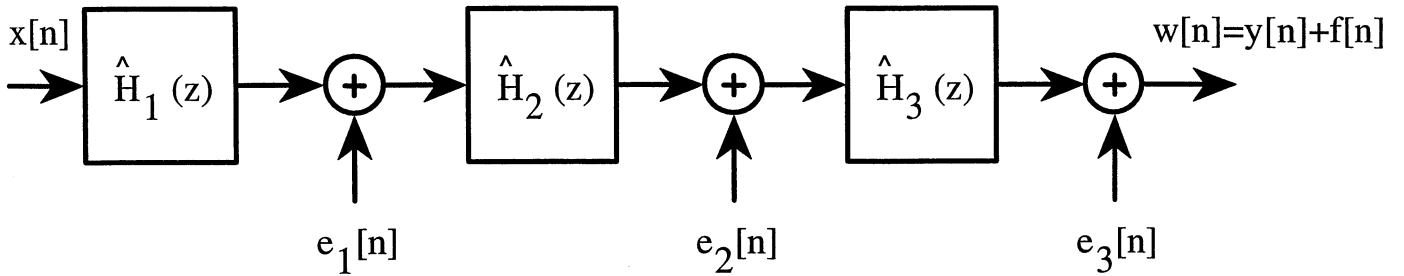
$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2b}}{12}$$

Kuvassa esitetyn lohkon ulostulokohina on sama kuin kertolaskussa syntyvä kohina. $H_3(z)$ realisoituu kuvan 50 mukaisesti. Nähdään, että tässä tapauksessa si synny lainkaan pyöristyskohinaa.



Kuva 50. $H_3(z)$:n toteutus.

Kokonaisjärjestelmän äärellisen sananpituuden toteutus on kuvan 51 mukainen.



Kuva 51. Kokonaisjärjestelmän äärellisen sananpituuden toteutus.

Tässä kuvassa $e_i[n]$ 't ($i = 1, 2, 3$) ovat lohkoissa $\hat{H}(z)$ vaikuttavat kohinalähteet. Ongelmana on nyt $H_1(z)$:n, $H_2(z)$:n ja $H_3(z)$:n sijoittaminen kuvan realsaatioon siten, että ulostulokohinan $f[n]$ varianssi on mahdollisimman pieni. Edellä havaittiin, että lohkojen $H_1(z)$ ja $H_2(z)$ jälkeisten kohinalähteiden varianssi on $\sigma_e^2 = 2^{-2b}/12$ ja lohkoissa $H_3(z)$ ei synny lainkaan pyöristyskohinaa. Kohinalähteen $e_1[n]$ aiheuttama lisäys ulostulotehoon on

$$\sigma_{f1}^2 = \sigma_{e1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n],$$

missä $h_1[n]$ on kaskadikytkennän $\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z)$ impulssivaste. Kohinalähteen $e_2[n]$ aiheuttama lisäys on puolestaan

$$\sigma_{f2}^2 = \sigma_{e2}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n],$$

missä $h_2[n]$ on $\hat{H}_3(z)$:n impulssivaste. $e_3[n]$:n vaikutuksen suuruus on

$$\sigma_{f3}^2 = \sigma_{e3}^2$$

ja ulostulokohinan kokonaisteho on

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \sigma_{f1}^2 + \sigma_{f2}^2 + \sigma_{f3}^2 \\ &= \sigma_{e1}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_1^2[n] + \sigma_{e2}^2 \sum_{n=0}^{\infty} h_2^2[n] + \sigma_{e3}^2. \end{aligned}$$

Kaikkiaan on olemassa $3! = 6$ tapaa kytkeä $H_1(z)$, $H_2(z)$ ja $H_3(z)$ kaskadiin. Tarkastellaan eri tapauksia.

1. KytKentä $\hat{H}_1(z)\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z) = H_1(z)H_2(z)H_3(z)$:

$$\sigma_{e1}^2 = \sigma_{e2}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \sigma_{e3}^2 = 0$$

$$\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z) = H_2(z)H_3(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1}) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}$$

$$\Rightarrow h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$\hat{H}_3(z) = H_3(z) = 1 + z^{-1} \Rightarrow h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow \sigma_f^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right)$$

$$+ \frac{2^{-2b}}{12} (1 + 1) + 0 = 4 \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}$$

2. KytKentä $\hat{H}_1(z)\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z) = H_1(z)H_3(z)H_2(z)$:

$$\sigma_{e1}^2 = \sigma_{e3}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \sigma_{e2}^2 = 0$$

$$\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z) = H_3(z)H_2(z) = (1 - \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})$$

$$= 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2} + z^{-3}$$

$$\Rightarrow h_1[n] = \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$h_2[n]$:ää ei tarvita koska $\sigma_{e2}^2 \equiv 0$.

$$\Rightarrow \sigma_f^2 = \frac{2^{-2b}}{12} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 1\right)$$

$$+ 0 + \frac{2^{-2b}}{12} = 3 \frac{1}{2} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}$$

3. KytKentä $\widehat{H}_1(z)\widehat{H}_2(z)\widehat{H}_3(z) = H_2(z)H_1(z)H_3(z)$:

$$\sigma_{e1}^2 = \sigma_{e2}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \quad \sigma_{e3}^2 = 0$$

$$\widehat{H}_2(z)\widehat{H}_3(z) = H_1(z)H_3(z) = (1 - \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2})(1 + z^{-1})$$

$$= 1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2} + z^{-3}$$

$$\Rightarrow h_1[n] = \delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + \frac{4}{3}\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$$\widehat{H}_3(z) = H_3(z) = 1 + z^{-1} \Rightarrow h_2[n] = \delta[n] + \delta[n-1]$$

$$\Rightarrow \sigma_f^2 = \frac{2^{-2b}}{12}(1 + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + 1)$$

$$+ \frac{2^{-2b}}{12}(1 + 1) + 0 = 7\frac{5}{9} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}.$$

4. KytKentä $\widehat{H}_1(z)\widehat{H}_2(z)\widehat{H}_3(z) = H_2(z)H_3(z)H_1(z)$:

$$\sigma_{e1}^2 = \sigma_{e3}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \quad \sigma_{e2}^2 = 0$$

$$\widehat{H}_2(z)\widehat{H}_3(z) = H_3(z)H_1(z) = 1 + \frac{4}{3}z^{-1} + \frac{4}{3}z^{-2} + z^{-3}$$

$$\Rightarrow h_1[n] = \delta[n] + \frac{4}{3}\delta[n-1] + \frac{4}{3}\delta[n-2] + \delta[n-3]$$

$h_2[n]$:ää ei tarvita, koska $\sigma_{e2}^2 \equiv 0$.

$$\Rightarrow \sigma_f^2 = \frac{2^{-2b}}{12}(1 + \frac{16}{9} + \frac{16}{9} + 1)$$

$$+ 0 + \frac{2^{-2b}}{12} = 6\frac{5}{9} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}.$$

5. KytKentä $\widehat{H}_1(z)\widehat{H}_2(z)\widehat{H}_3(z) = H_3(z)H_1(z)H_2(z)$:

$$\sigma_{e2}^2 = \sigma_{e3}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \quad \sigma_{e1}^2 = 0$$

$\sigma_{e1}^2 = 0 \Rightarrow h_1[n]$:ää ei tarvita.

$$\begin{aligned}\hat{H}_3(z) &= H_2(z) = 1 + \frac{1}{3}z^{-1} + z^{-2} \\ \Rightarrow h_2[n] &= \delta[n] + \frac{1}{3}\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ \Rightarrow \sigma_f^2 &= 0 + \frac{2^{-2b}}{12}(1 + \frac{1}{9} + 1) \\ &\quad + \frac{2^{-2b}}{12} = 3\frac{1}{9} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}.\end{aligned}$$

6. KytKentä $\hat{H}_1(z)\hat{H}_2(z)\hat{H}_3(z) = H_3(z)H_2(z)H_1(z)$:

$$\sigma_{e2}^2 = \sigma_{e3}^2 = \frac{2^{-2b}}{12}, \sigma_{e1}^2 = 0$$

$\sigma_{e1}^2 = 0 \Rightarrow h_1[n]$:ää ei tarvita.

$$\begin{aligned}\hat{H}_3(z) &= H_1(z) = 1 + \frac{1}{2}z^{-1} + z^{-2} \\ \Rightarrow h_2[n] &= \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n-2] \\ \Rightarrow \sigma_f^2 &= 0 + \frac{2^{-2b}}{12}(1 + \frac{1}{4} + 1) \\ &\quad + \frac{2^{-2b}}{12} = 3\frac{1}{4} \cdot \frac{2^{-2b}}{12}.\end{aligned}$$

Yllä olevan tarkastelun perusteella havaitaan, että ulostulon kohinateho minimoituu, kun $H(z) = H_3(z)H_1(z)H_2(z)$.

Tehtävä 30: Laske seuraavien äärellispituisten jonojen (pituus = N) diskreetit Fourier-muunnokset.

(a) $x[n] = \delta[n]$

(b) $x[n] = \delta(n - n_0)$, $0 < n_0 < N$

(c) $x[n] = a^n$, $0 < n < N - 1$.

N :n pituisen jonon $x[0], x[1], \dots, x[n - 1]$ DFT on

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi nk/N}$$

30(a):

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]e^{-j2\pi nk/N} = 1 \cdot e^{-j2\pi \cdot 0 \cdot k/N} + 0 \cdot e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot k/N} + 0 + \dots = 1$$

30(b):

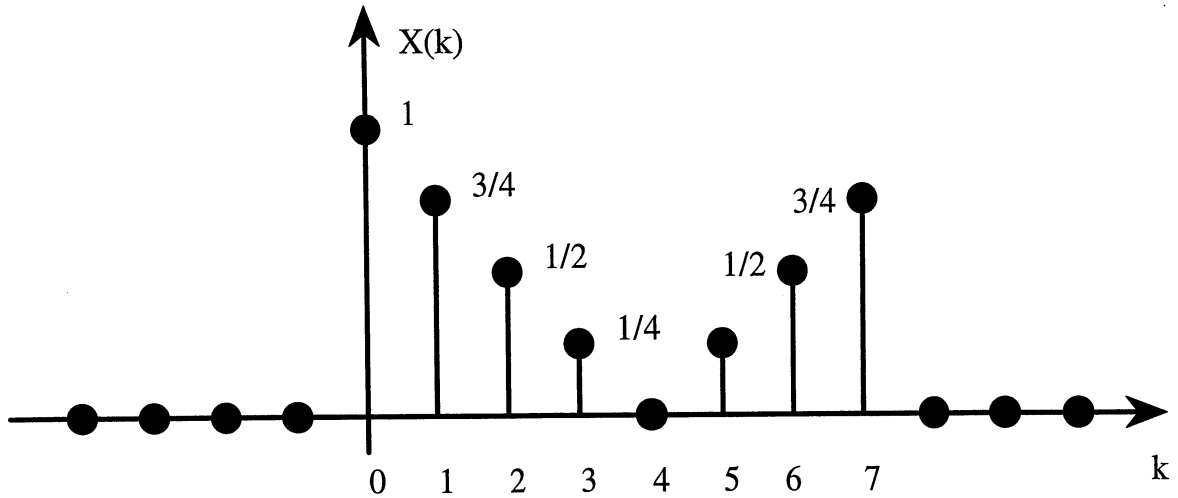
$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n - n_0]e^{-j2\pi nk/N} \\ &= 0 + 0 + \dots + e^{-j2\pi n_0 k/N} + 0 \cdot e^{-j2\pi \cdot 1 \cdot k/N} + 0 \dots = e^{-j2\pi n_0 k/N} \end{aligned}$$

30(c):

$$\begin{aligned} X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} a^n e^{-j2\pi nk/N} = \sum_{n=0}^{N-1} \left(a e^{-j2\pi k/N} \right)^n \\ &= \frac{1 - \left(a e^{-j2\pi k/N} \right)^N}{1 - a e^{-j2\pi k/N}} = \frac{1 - a^N e^{-j2\pi k}}{1 - a e^{-j2\pi k/N}} \end{aligned}$$

Tehtävä 31: Kuvassa 52 on esitetty jonon $x[n]$, jonka pituus on 8, kahdeksanpisteinen DFT.

(a) Määrä jono $x[n]$.



Kuva 52. Kahdeksanpisteinen DFT.

(b) Vertaa jonon $x[n]$ z -muunnosta ja DFT:tä keskenään. Missä yksikköympyrällä olevissa pisteissä nämä yhtyvät?

Käänteinen DFT saadaan kaavasta

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j2\pi nk/N}$$

31(a):

$$\begin{aligned} x[n] &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 X(k) e^{j2\pi nk/8} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 1 + \frac{3}{4} e^{j2\pi n/8} + \frac{1}{2} e^{j2\pi n \cdot 2/8} + \frac{1}{4} e^{j2\pi n \cdot 3/8} + 0 e^{j2\pi n \cdot 4/8} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} e^{j2\pi n \cdot 5/8} + \frac{1}{2} e^{j2\pi n \cdot 3/6} + \frac{3}{4} e^{j2\pi n \cdot 7/8} \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 1 + e^{j2\pi n \cdot 4/8} \left[\frac{1}{4} (e^{j2\pi n \cdot 1/8} + e^{-j2\pi n \cdot 1/8}) + \frac{1}{2} (e^{j2\pi n \cdot 2/8} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. e^{-j2\pi n \cdot 2/8}) + \frac{3}{4} (e^{j2\pi n \cdot 3/8} + e^{-j2\pi n \cdot 3/8}) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8}(-1)^n \left[\frac{1}{2} \cos(n\pi/4) + \cos(n\pi/2) + \frac{3}{2} \cos(3n\pi/4) \right] \\
 x[0] &= \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{2} = \frac{4}{8} \\
 x[1] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 0 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 x[2] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} (0 - 1 - 0) = 0 \\
 x[3] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{-\sqrt{2}}{4} + 0 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 x[4] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{2} + 1 - \frac{3}{2} \right) = 0 \\
 x[5] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{-\sqrt{2}}{4} + 0 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{8} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 x[6] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} (0 - 1 + 0) = 0 \\
 x[7] &= \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} + 0 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \right) = \frac{1}{8} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)
 \end{aligned}$$

31(b):

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \frac{1}{8} \left[4 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z^{-1} + z^{-7}) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (z^{-3} + z^{-5}) \right] \\
 X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{8} \left[4 + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (e^{-j\omega} + e^{-j7\omega}) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (e^{-j3\omega} + e^{-j5\omega}) \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[4 + e^{-j4\omega} \left(\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (e^{j3\omega} + e^{-j3\omega}) + \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) (e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \right) \right] \\
 &= \frac{1}{8} \left[4 + e^{-j4\omega} \left((2 + \sqrt{2}) \cos 3\omega + (2 - \sqrt{2}) \cos \omega \right) \right] \\
 &\Rightarrow \\
 X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{8} \left[4 + e^{-j4\omega} \left((2 + \sqrt{2}) \cos 3\omega + (2 - \sqrt{2}) \cos \omega \right) \right] \\
 X(e^{j0}) &= \frac{1}{8} \left[4 + \left((2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) \right) \right] = 1 \\
 X(e^{j1\pi/8}) &= X(e^{j7 \cdot 2\pi/8})
 \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{8} \left[4 + (-1) \left((2 + \sqrt{2})(-1/\sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})(1/\sqrt{2}) \right) \right] = 3/4$$

$$X(e^{j2 \cdot 2\pi/8}) = X(e^{j6 \cdot 2\pi/8}) = \frac{1}{8} \left[4 + (+1)(0 + 0) \right] = 1/2$$

$$X(e^{j3 \cdot 2\pi/8}) = X(e^{j5 \cdot 2\pi/8})$$

$$= \frac{1}{8} \left[4 + (-1) \left((2 + \sqrt{2})(1/\sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2})(-1/\sqrt{2}) \right) \right] = 1/4$$

$$X(e^{j4 \cdot 2\pi/8}) = \frac{1}{8} \left[4 + (+1) \left((2 + \sqrt{2})(-1) + (2 - \sqrt{2})(-1) \right) \right] = 0.$$

$\Rightarrow X(e^{jk \cdot 2\pi/8}) = X(k)$. \Rightarrow Jonomme $x[n]$ DFT:n k :nnes komponentti voidaan määrätä laskemalla jonon z -muunos yksikköympyrän pisteessä $z = e^{jk \cdot 2\pi/8}$, niinkuin pitäisikin teorian mukaan. saadaan.

THE INVERSE z -TRANSFORM

- There exist several techniques to find the sequence $x[n]$ after knowing its z -transform as well as the region of convergence.
- This course concentrates on the technique based on the partial fraction expansion.
- The students are encouraged to read other techniques in textbooks.
- For the sequences considered in this course, the z -transform is expressible as

$$X(z) = \frac{R_M(z)}{P_N(z)} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}.$$

- Alternatively, $X(z)$ can be written as

$$X(z) = d_0 \frac{\prod_{k=0}^M (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - d_k z^{-1})},$$

where the d_k 's and the c_k 's are the poles and zeros of $X(z)$.

- Assuming that there are no repeated poles, $X(z)$ can be expressed as

$$X(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}}.$$

- Here,

$$A_k = (1 - d_k z^{-1})X(z)|_{z = d_k}.$$

- For $M < N$, the B_r 's are absent.
- Using the notation $a_0 = 1$, B_{M-N} , B_{M-N-1} , \dots , and B_0 can be determined recursively as

$$B_{M-N} = -b_M/a_N$$

and for $k = 1, 2, \dots, M - N$

$$B_{M-N-k} = \frac{-B_{M-N-k+1} - \sum_{l=0}^{k-1} B_{M-N-k+l} a_{M-N-k+l}}{a_N}.$$

- If $X(z)$ possesses a s th-order pole at $z = d_i$, then the

partial fraction expansion takes the following form:

$$\begin{aligned}
 X(z) &= \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} \\
 &+ \sum_{k=1, k \neq i}^N \frac{A_k}{1 - d_k z^{-1}} \\
 &+ \sum_{m=1}^s \frac{C_m}{(1 - d_i z^{-1})^m}.
 \end{aligned}$$

- The A_k 's and B_r 's are determined like above.
- The C_m 's can be determined as

$$C_m = \frac{1}{(s-m)!(-d_i)^{s-m}} \left\{ \frac{d^{s-m}}{du^{s-m}} [1 - d_i u]^s X(u^{-1}) \right\} \Big|_{u = d_i^{-1}}.$$

- The inverse z -transform can now be determined as long as we know the region of convergence, which is in general of the form

$$r_a < |z| < r_b.$$

- For $|d| \leq r_a$, we have the following z -transform pairs:

$$d^n u[n] \iff \frac{1}{1 - dz^{-1}}$$

$$(n+1)d^n u[n] \iff \frac{1}{(1 - dz^{-1})^2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2!}d^n u[n] \iff \frac{1}{(1-dz^{-1})^3}$$

$$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!}d^n u[n] \iff \frac{1}{(1-dz^{-1})^k}$$

- These sequences are nonzero only for $n \leq 0$, that is, they are causal sequences.
- For $|d| \geq r_b$, in turn, we have the following z -transform pairs:

$$-d^n u[-n-1] \iff \frac{1}{1-dz^{-1}}$$

$$-(n+1)d^n u[-n-2] \iff \frac{1}{(1-dz^{-1})^2}$$

$$-\frac{(n+1)(n+2)}{2!}d^n u[-n-3] \iff \frac{1}{(1-dz^{-1})^3}$$

$$-\frac{(-1)^k(-n-1)!}{(-n-k)!(k-1)!}d^n u[-n-k] \iff \frac{1}{(1-dz^{-1})^k},$$

where

$$u[-n-k] = \begin{cases} 1, & n \leq k \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

- The first sequence is nonzero for $n \leq -1$. The k th sequence is nonzero for $n \leq -k$. These sequences are thus anticausal.

- For finding the inverse z -transform for $X(z)$ we need in addition the transform pair

$$\delta[n - k] \iff z^{-k}.$$

- It should be pointed out that in the above the d_k 's are generally complex-valued.

Example 7: Reconsider the following example which we solved earlier in a rather complicated manner without the use of the z -transform:

- Consider a causal system characterized by the difference equation $y[n] = ay[n - 1] + x[n]$.

(a) What is the unit sample response of our system?

(b) For which values of a the system is stable?

(c) What is the response to the excitation given by

$$x[n] = u[n] - u[n - N] = \begin{cases} 1 & , 0 \leq n \leq N - 1 \\ 0 & , \text{otherwise.} \end{cases}$$

(a) Applying the z -transform to both sides of the equation

$$y[n] = ay[n - 1] + x[n]$$

and using the linearity and shifting properties of the z -transform (transparency 89), we obtain

$$Y(z) = az^{-1}Y(z) + X(z) \iff Y(z) = \frac{X(z)}{1 - az^{-1}}.$$

- For the unit sample, $\{\delta[n]\}$,

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = 1.$$

