Parametrien oppiminen

- Tilastollisen mallin (Bayes-verkko) rakenne on kiinnitetty, sen numeeristen parametrien (ehdollisten todennäköisyyksien) arvot pyritään määräämään
- Oletamme havaintojen olevan täydellisiä; s.o., jokaisen datapisteen sisältävän arvot kaikille muuttujille
- Jos makeissäkkien salmiakki-hedelmä-karkkien osuudet voivat olla mielivaltaisia, niin hypoteeseja onkin jatkumo
- Salmiakkimakeisten suhteellinen osuus säkissä θ on ainut parametri ja sitä vastaava hypoteesi on h_θ
- Bayes-verkkoon tarvitaan vain yhtä satunnaismuuttujaa (Maku), jolla on mahdolliset arvot salmiakki (tn. θ) ja hedelmä (tn. $1 - \theta$), vastaava solmu

- Avataan kääreestä n karkkia, joista s kpl on salmiakkia ja h kpl on hedelmää
- Oletetaan kaikkien sekoitussuhteiden olevan yhtä todennäköisiä *a priori* ⇨ maksimiuskottavuuden menetelmä

$$P(\mathbf{d} \mid h_\theta) = \prod_{j=1,\dots,n} P(d_j \mid h_\theta) = \theta^s (1 - \theta)^h$$

- Samaan maksimaalisen uskottavuuden hypoteesiin päädytään maksimoimalla uskottavuuden logaritmia (log likelihood)

$$\begin{aligned} L(\mathbf{d} \mid h_\theta) &= \log P(\mathbf{d} \mid h_\theta) \\ &= \textstyle\sum_{j=1,\dots,n} \log P(d_j \mid h_\theta) \\ &= s \log \theta + h \log(1 - \theta) \end{aligned}$$

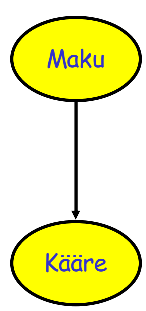
- Näin tulo yli aineiston vaihtuu summaksi, joka yleensä on helpompi maksimoida
- Derivoimalla L θ:n suhteen ja etsimällä nollakohta saadaan selville θ:n maksimiuskottavuuden arvo

$$dL(\mathbf{d} \mid h_\theta)/d\theta = s/\theta - h/(1 - \theta) = 0$$

$$\Rightarrow \theta = s/(s + h) = s/n$$

- Maksimaalisen uskottavuuden hypoteesi h_{ML} sanoo säkissä olevien salmiakkien osuuden olevan sama kuin mitä avatuista karkeista on havaittu
- Edellä kuvattua menetelmää voidaan käyttää yleisesti (useammankin parametrin arvojen selvittämiseksi)

- Menetelmän merkittävä ongelma: jos jotain tapahtumaa ei ole havaittu laisinkaan (pienessä havaintoaineistossa), niin h_{ML} antaa sille todennäköisyyden nolla
- Muutetaan esim. siten, että riippuen karkin mausta se kääritään probabilistisen säännön perusteella joko punaiseen tai vihreään paperiin



P(salmiakki)
θ

Maku	P(punainen)
salmiakki	θ_1
hedelmä	θ_2

- Nyt todennäköisyysmallissa on kolme parametria θ, θ_1, ja θ_2
- Bayes-verkon standardisemantiikan perusteella voidaan laskea tapahtumien todennäköisyyksiä; esim.
  $P(\text{Maku} = \text{salmiakki}, \text{Kääre} = \text{vihreä} \mid h_{\theta,\theta_1,\theta_2})$
  $= P(\text{Maku} = \text{salmiakki} \mid h_{\theta,\theta_1,\theta_2}) \cdot$
  $\quad P(\text{Kääre} = \text{vihreä} \mid \text{Maku} = \text{salmiakki}, h_{\theta,\theta_1,\theta_2})$
  $= \theta(1 - \theta_1)$
- Avaamme nyt n makeista, joista s on salmiakkia ja h hedelmää, joiden käärepaperien värien lkm:t ovat p_s, v_s, p_h ja v_h
- Tämän aineiston uskottavuus $P(\mathbf{d} \mid h_{\theta,\theta_1,\theta_2})$ on

$$\theta^s (1 - \theta)^h \, \theta_1^{p_s} (1 - \theta_1)^{v_s} \, \theta_2^{p_h} (1 - \theta_2)^{v_h}$$

- Otetaan logaritmi edellisestä:
  $L = [s \log \theta + h \log(1 - \theta)] + [p_s \log \theta_1 + v_s \log(1 - \theta_1)]$
  $\quad + [p_h \log \theta_2 + v_h \log(1 - \theta_2)]$
- Parametrien suhteen derivoimalla ja hakemalla nollakohta saadaan

$$\partial L/\partial\theta = s/\theta - h/(1 - \theta) = 0 \Rightarrow \theta = s/(s + h)$$
$$\partial L/\partial\theta_1 = p_s/\theta_1 - v_s/(1 - \theta_1) = 0 \Rightarrow \theta_1 = p_s/(p_s + v_s)$$
$$\partial L/\partial\theta_2 = p_h/\theta_2 - v_h/(1 - \theta_2) = 0 \Rightarrow \theta_2 = p_h/(p_h + v_h)$$

- θ:n arvo on kuten ennenkin ja θ_1:n arvo on punaisen käärepaperin osuus salmiakkikarkkien joukossa (θ_2 vast.)
- Näin oppimisongelma jakaantuu erillisiksi oppimistehtäviksi kullekin parametrille

Naiivi Bayes

- Luokkamuuttuja C on Bayes-verkon juuri ja attribuutit X_i ovat sen lehtiä
- Naiivi oletus on, että attribuutit ovat ehdollisesti riippumattomia toisistaan annettuna luokka
- Kun käytössä on Boolen muuttujat, niin parametrit ovat

$$\theta = P(C = true)$$
$$\theta_{i1} = P(X_i = true \mid C = true)$$
$$\theta_{i2} = P(X_i = true \mid C = false)$$

- Näiden arvot löydetään kuten edellä
- Kun verkko on opetettu, niin havainto $[x_1, \ldots, x_n]$, jonka luokkamuuttujan C arvo on tuntematon, voidaan luokitella

$$\underline{P}(C \mid x_1, \ldots, x_n) = \alpha\, \underline{P}(C) \prod_i \underline{P}(x_i \mid C)$$

Jatkuva-arvoiset muuttujat

- Tarkastellaan yhden muuttujan Gaussisen tiheysfunktion parametrien oppimista
- Aineiston siis tuottaa

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Mallin parametrit ovat keskiarvo μ ja hajonta σ
- Olkoot havaitut arvot $x_1, \ldots, x_n$
- Nyt uskottavuuden logaritmi on

$$L = \sum_{j=1}^{n} \log \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{\frac{-(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$
$$= n(-\log\sqrt{2\pi} - \log\sigma) - \sum_{j=1}^{n} \frac{-(x_j-\mu)^2}{2\sigma^2}$$

- Osittaisderivaattojen nollakohdat:

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu) = 0 \qquad \Rightarrow \mu = \sum_j x_j \big/ n$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \mu)^2 = 0 \quad \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{\sum_j (x_j - \mu)^2}{n}}$$

- Siis keskiarvon maksimaalisen uskottavuuden arvo on havaintojen keskiarvo
- ja hajonnan vastaava arvo on varianssin neliöjuuri
- Jälleen saatiin siis intuitiivisesti oikeat arvot

Yhteenveto

- Tekoäly on todella laaja tutkimuskenttä, myös metodologisesti
- Merkittävää kehitystä tutkimuksessa tapahtuu päivittäin
- Probabilistinen lähestyminen on ajanut ohi loogisen suuntauksen

- Näyttäviä demonstraatioita menetelmien mahdollisuuksista saadaan kiihtyvällä tahdilla
- Myös vähemmälle julkisuudelle jäävät arkisovellukset lisääntyvät

- Fyysisen agentin interaktio toimintaympäristönsä sekä ihmisten kanssa kaipaa vielä edistysaskelia