Muuttujien eliminointi

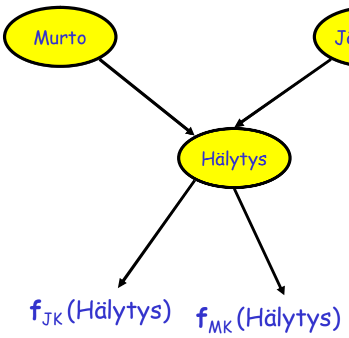
- Toistuvat alilauseet voidaan evaluoida kerran ja niiden arvo talletetaan käytettäväksi aina tarvittaessa
- Tarkastellaan muuttujien eliminointi -algoritmia lausekkeen $\mathbf{P}(Murto \mid jussikäy, meerikäy)$ evaluoinnissa:

$$\alpha \underbrace{\mathbf{P}(Murto)}_{M} \textstyle\sum_j \underbrace{P(j)}_{J} \sum_h \underbrace{\mathbf{P}(h \mid Murto, j)}_{H} \cdot \underbrace{P(jussikäy \mid h)}_{JK} \underbrace{P(meerikäy \mid h)}_{MK}$$

- Edellä on tekijöille otettu lyhennysmerkinnät
- Tekijä MK, $P(meerikäy \mid h)$, ei vaadi yli muuttujan MeeriKäy summaamista, koska arvo meerikäy on kiinnitetty

- Talletetaan todennäköisyydet 2-alkioiseen vektoriin
$\mathbf{f}_{MK}(Hälytys) = [P(meerikäy \mid hälytys), P(meerikäy \mid \neg hälytys)]^T$
- Tekijälle JK talletetaan samanlainen vektori $\mathbf{f}_{JK}(Hälytys)$

P(murto)
.001

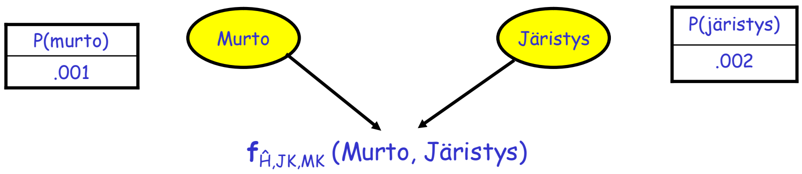


P(järistys)
.002

Murto	Järistys	P(hälytys)
True	True	.95
True	False	.94
False	True	.29
False	False	.001

- Tekijä H on $P(h \mid Murto, j)$ ja se vaatii $2 \times 2 \times 2$ matriisin $f_H(Hälytys, Murto, Järistys)$
- Tekijöiden MK, JK ja H tulosta summataan Hälytys pois, jolloin saadaan yli muuttujien Murto ja Järistys arvoalueiden käyvä 2×2 matriisi

$$f_{\hat{H},JK,MK}(Murto, Järistys) =$$
$$\sum_h f_H(h, Murto, Järistys) \times f_{JK}(h) \times f_{MK}(h) =$$
$$f_H(hälytys, Murto, Järistys) \times f_{JK}(hälytys) \times f_{MK}(hälytys) +$$
$$f_H(\neg hälytys, Murto, Järistys) \times f_{JK}(\neg hälytys) \times f_{MK}(\neg hälytys)$$



Kahden matriisin pisteittäisen tulon laskeminen

A	B	$f_1(A,B)$
T	T	.3
T	F	.7
F	T	.9
F	F	.1

B	C	$f_2(B,C)$
T	T	.2
T	F	.8
F	T	.6
F	F	.4

A	B	C	$f_3(A,B,C)$
T	T	T	.3 × .2
T	T	F	.3 × .8
T	F	T	.7 × .6
T	F	F	.7 × .4
F	T	T	.9 × .2
F	T	F	.9 × .8
F	F	T	.1 × .6
F	F	F	.1 × .4

- Vastaavasti muuttuja Järistys summataan pois tulosta $\mathbf{f}_J(\text{Järistys}) \times \mathbf{f}_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto, Järistys})$, jolloin saadaan matriisi

$$\mathbf{f}_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}) = \mathbf{f}_J(\text{järistys}) \times \mathbf{f}_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto, järistys}) + \mathbf{f}_J(\neg\text{järistys}) \times \mathbf{f}_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}, \neg\text{järistys})$$

P(murto)
.001

$\mathbf{f}_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto})$

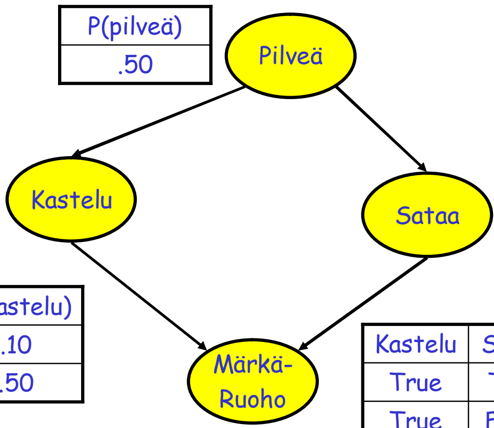
- Lopulta saadaan kyselyn $\underline{P}(\text{Murto} \mid \text{jussikäy, meerikäy})$ vastaus
  $\alpha\ \mathbf{f}_M(\text{Murto}) \times \mathbf{f}_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto})$,
  missä $\mathbf{f}_M(\text{Murto}) = \underline{P}(\text{Murto})$
- Muuttujien summaamisessa pois voidaan tekijät, jotka eivät riipu muuttujan arvosta, siirtää summauksen ulkopuolelle
- Kyselyn kannalta irrelevantit tekijät voidaan poistaa
- Kysely $P(\text{JussiKäy} \mid \text{murto})$ antaa lauseen, jonka viimeinen tekijä on $\sum_h \ldots \sum_{mk} P(\text{meerikäy} = mk \mid \text{Hälytys} = h)$, jonka arvo määritelmän mukaan on 1
- Verkon solmut, jotka eivät ole kyselymuuttujan esi-isiä tai havaintomuuttujia ovat kyselyn kannalta irrelevantteja

- Bayes-verkko on *monipuu* (polytree), jos kunkin solmuparin välillä on korkeintaan yksi suuntaamaton polku
- Tarkan päättelyn aika- ja tilavaativuus monipuussa on verkon koon suhteen lineaarista
- Päättely Bayes-verkossa sisältää erikoistapauksenaan propositiologiikan päättelyn
- Näin ollen yleisessä tapauksessa päättely Bayes-verkossa on NP-kovaa
- Itse asiassa voidaan osoittaa, että päättely on yhtä vaativaa kuin toteuttavien arvoasetusten lukumäärän laskeminen
- Ongelma on aidosti vaikeampi kuin NP-kova, se on #P-kova

Approksimatiivinen päättely

- Koska tarkka päättely on laskennallisesti vaativaa, niin on syytä tarkastella ratkaisujen approksimointia
- Approksimointi perustuu satunnaiseen otantaan tunnetusta todennäköisyysjakaumasta
- Esim. painottamaton kolikko voidaan mieltää satunnais-muuttujaksi Lantti, jonka arvoalue on [kruuna, klaava] ja priori-todennäköisyys P(Lantti) = [0.5, 0.5]
- Otanta tästä jakaumasta vastaa kolikon heittoa, todennäköisyydellä 0.5 tuloksena on kruuna ja todennäköisyydellä 0.5 klaava
- Jos satunnaislukugeneraattori, jolta saadaan lukuja väliltä [0, 1], niin minkä tahansa yhden muuttujan jakaumasta voidaan helposti tehdä otantaa

P(pilveä)
.50



Pilveä	P(sataa)
True	.80
False	.20

Pilveä	P(kastelu)
True	.10
False	.50

Kastelu	Sataa	P(märkäruoho)
True	True	.99
True	False	.90
False	True	.90
False	False	.00

Prioriotanta

- Bayes-verkosta, johon ei liity havaintoja, otantaa voidaan tehdä muuttuja kerrallaan topologisessa järjestyksessä
- Kun vanhempien arvot on arvottu, niin tiedetään minkä jakauman perusteella otanta lapsessa on tehtävä
- Kiinnitetään esimerkkiverkon solmuille topologinen järjestys [Pilveä, Kastelu, Sataa, MärkäRuoho]
  1. Vedetään jakaumasta P(Pilveä) = [0.5, 0.5] satunnainen arvo, esim. True
  2. Vedetään jakaumasta P(Kastelu | pilveä) = [0.1, 0.9] satunnainen arvo, esim. False
  3. Vedetään jakaumasta P(Sataa | pilveä) = [0.8, 0.2] satunnainen arvo, esim. True
  4. Vedetään jakaumasta P(MärkäRuoho | ¬kastelu, sataa) = [0.9, 0.1] satunnainen arvo, esim. True

- Verkon määräämästä prioriyhteisjakaumasta nyt vedetty tapahtuma siis on [True, False, True, True]
- Merkitään todennäköisyyttä, että prioriotanta vetää tietyn tapahtuman $S_{PO}(x_1, \ldots, x_n)$
- Otantamenetelmän perusteella se on

$$\prod_{i=1,\ldots,n} P(x_i \mid vanhemmat(X_i))$$

- Toisaalta tämä on tapahtuman todennäköisyys Bayes-verkon esittämässä yhteisjakaumassa, joten

$$S_{PO}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n)$$

- Merk. tapahtuman $x_1, \ldots, x_n$ frekvenssiä $N_{PO}(x_1, \ldots, x_n)$ yhteensä N:n otospisteen joukossa

- Tapahtuman otantafrekvenssi konvergoituu rajalla odotusarvoonsa

$$\lim_{N\to\infty} N_{PO}(x_1, \ldots, x_n)/N = S_{PO}(x_1, \ldots, x_n) = P(x_1, \ldots, x_n)$$

- Esim. S_{PO}([True, False, True, True]) = 0.5 × 0.9 × 0.8 × 0.9 = 0.324, joten kun N on iso, niin odotamme, että 32.4% otospisteistä on tämä tapahtuma
- Menetelmän antama arvio on *konsistentti* siinä mielessä, että todennäköisyys on eksakti rajalla
- Osittain määrätyn tapahtuman $x_1, \ldots, x_m$, $m \le n$, todennäköisyydelle saadaan myös konsistentti estimaatti

$$P(x_1, \ldots, x_m) \approx N_{PO}(x_1, \ldots, x_m)/N$$

- Otoksesta arvioitua todennäköisyyttä merk. $P_{data}(\cdot)$

Hylkäysotanta

- Ehdollisen todennäköisyyksien $P(X \mid \mathbf{e})$ arvioimiseksi voitaisiin käyttää seuraavaa otantamenetelmää
  1. Vedetään otos verkon määräämästä priorijakaumasta
  2. Hylätään kaikki otospisteet, jotka eivät toteuta havaintoja $\mathbf{e}$
  3. Arvon $P_{data}(X = x \mid \mathbf{e})$ määräämiseksi lasketaan kuinka suuressa osassa jäljellejääneistä otospisteistä pätee $X = x$

- Menetelmän antama jakauma $\mathbf{P}_{data}(X \mid \mathbf{e})$ on algoritmin perusteella

$$\alpha\, \mathbf{N}_{PO}(X, \mathbf{e}) = \mathbf{N}_{PO}(X, \mathbf{e}) \,/\, N_{PO}(\mathbf{e})$$

- Osittain määrätyn tapahtuman todennäköisyyden arviona tämä on konsistentti estimaatti

$$\mathbf{P}_{data}(X \mid \mathbf{e}) \approx \mathbf{P}(X, \mathbf{e}) \,/\, P(\mathbf{e}) = \mathbf{P}(X \mid \mathbf{e})$$

- Vedetään 100 otospistettä jakauman $\mathbf{P}(Sataa \mid kastelu)$ estimoimiseksi
  - Saamistamme tapahtumista 73, joilla pätee $Kastelu = False$, hylätään
  - Lopuilla tapahtumilla pätee $kastelu$
  - Näistä 8:ssa tapauksessa $Sataa = True$ ja 19:ssä $False$
- Tässä tapauksessa $\mathbf{P}_{data}(Sataa \mid kastelu) \approx [0.296, 0.704]$, kun todellinen jakauma on $[0.3, 0.7]$
- Suurempi otos tuottaa tarkemman estimaatin
- Tn. arvioiden virheen hajonta on suhteessa osamäärään $1/\sqrt{n}$, missä n on otospisteiden lukumäärä
- Turhaan vedettyjen otospisteiden suuri määrä on ongelma: havaintojen kanssa konsistenttien otospisteiden lukumäärä putoaa eksponentiaalisesti ehtomuuttujien lkm:n kasvaessa

Painotusotanta

- Turhaan hylättävien otospisteiden vetämisen välttämiseksi kiinnitetään havaintomuuttujien **E** arvot ja tehdään otanta vain muuttujien **X** ja **Y** yli
- Vedetyt tapahtumat eivät kuitenkaan kaikki oli samanarvoisia
- Tapahtumia painotetaan uskomusarvoilla (likelihood)
- Kuinka uskottavasti tapahtuma vastaa havaintoja mitattuna havaintomuuttujien ehdollisten todennäköisyyksien tulolla annettuna niiden vanhemmat
- Intuitiivisesti ajatellen tapahtumille, joissa havaintojen yhdessä esiintyminen vaikuttaa epäuskottavalta, annetaan vähemmän painoarvoa

- Kyselyyn **P**(Sataa | kastelu, märkäruoho) vastaamiseksi painoarvo w alustetaan arvoon 1.0
- Vedetään otos jakaumasta **P**(Pilveä) = [0.5, 0.5], esim. arvo True
- Koska Kastelu on havaintomuuttuja, jonka arvo on True, niin painoa päivitetään w ← w × P(kastelu | pilveä) = 0.1
- Vedetään otos jakaumasta **P**(Sataa | pilveä) = [0.8, 0.2], esim. arvo True
- MärkäRuoho on havaintomuuttuja, jonka arvo on True ⇨

  w ← w × P(märkäruoho | kastelu, sataa) = 0.099
- Saatiin siis esimerkki [True, True, True, True] tapauksesta Sataa = True painoltaan 0.099

- Merkitään $\mathbf{Z} = \{ X \} \cup \mathbf{Y}$
- Otospisteitä painottava otanta arpoo kullekin muuttujista $\mathbf{Z}$ arvon annettuna sen vanhempien arvot

$$S_W(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1,\dots,l} P(z_i \mid vanhemmat(Z_i))$$

- $Vanhemmat(Z_i)$ voi sisältää niin havainto- kuin piilomuuttujiakin

- Painottava otanta siis ottaa havainnot paremmin huomioon kuin priorijakauma $P(\mathbf{z})$
- Toisaalta S_W ottaa huomioon vain kunkin muuttujan Z_i esi-isiin lukeutuvat havainnot
- Todellinen posteriorijakauma $P(\mathbf{z} \mid \mathbf{e})$ huomioi kaikki havainnot

- Uskottavuuspainot w korjaavat jakaumien eron
- Olkoon otospiste $\mathbf{x}$ muodostunut muuttujien arvoista $\mathbf{z}$ ja $\mathbf{e}$, jolloin

$$w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1,\dots,m} P(e_i \mid vanhemmat(E_i))$$

- Täten otospisteen painotettu todennäköisyys $S_W(\mathbf{z}, \mathbf{e}) \cdot w(\mathbf{z}, \mathbf{e})$ on

$$\prod_{i=1,\dots,l} P(z_i \mid vanhemmat(Z_i)) \cdot \prod_{i=1,\dots,m} P(e_i \mid vanhemmat(E_i))$$
$$= P(\mathbf{z}, \mathbf{e}),$$

koska tulojen muuttajat kattavat kaikki verkon muuttujat

- Nyt voidaan osoittaa, että painotusotannan estimaatit ovat konsistentteja

$$
\begin{aligned}
P_{data}(x \mid \mathbf{e}) &= \alpha \textstyle\sum_y N_W(x, \mathbf{y}, \mathbf{e})\, w(x, \mathbf{y}, \mathbf{e}) \\
&\approx \alpha' \textstyle\sum_y S_W(x, \mathbf{y}, \mathbf{e})\, w(x, \mathbf{y}, \mathbf{e}) \\
&= \alpha' \textstyle\sum_y P(x, \mathbf{y}, \mathbf{e}) \\
&= \alpha' P(x, \mathbf{e}) \\
&= P(x \mid \mathbf{e})
\end{aligned}
$$

- Painotusotanta on tehokas menetelmä, koska kaikki vedetyt otospisteet hyödynnetään
- Menetelmä kuitenkin kärsii kun havaintomuuttujien lukumäärä kasvaa, koska useimpien otospisteiden paino on hyvin pieni ja harvat pisteet dominoivat estimaattia

MCMC-algoritmi

- Markov chain Monte Carlo
- Monte Carlo -algoritmi on satunnaisalgoritmi, joka voi tuottaa väärän vastauksen pienellä todennäköisyydellä (vs. Las Vegas -algoritmi)
- Otospisteitä vedetään tekemällä satunnainen muutos edelliseen tapahtumaan
- Seuraava tila valitaan arpomalla arvo yhdelle ei-havainto-muuttujista X_i ehdollistettuna sen *Markov-peitteeseen* kuuluvien muuttujien nykyisillä arvoilla
- Solmun Markov-peitteeseen kuuluvat sen vanhemmat, lapset ja lapsien vanhemmat
- MCMC tuottaa satunnaiskulun tila-avaruudessa, jossa havainto-muuttujien arvoja ei muuteta

4.2 YKSINKERTAISET PÄÄTÖKSET

- Liitetään tilaan S numeerinen *hyötyarvio* (utility) $U(S)$, joka kuvaa tilan saavuttamisen haluttavuutta
- Epädeterministisen toiminnon A mahdollisia tulostiloja ovat $Tulos_i(A)$, missä i käy yli eri tulosten
- Ennen toiminnon A suorittamista sen mahdollisille tuloksille annetaan todennäköisyydet $P(Tulos_i(A) \mid Suorita(A), E)$, missä E on agentin havainnot
- A:n odotettu hyöty (expected utility):

$$EU(A \mid E) = \sum_i P(Tulos_i(A) \mid Suorita(A), E) \cdot U(Tulos_i(A))$$

- *Maksimaalisen odotetun hyödyn periaate* edellyttää rationaalisen agentin valitsevan sen toiminnon, jonka odotusarvoinen hyöty on suurin
- Jos ideaa haluttaisiin soveltaa toimintojonojen valintaan, niin kaikki mahdolliset jonot tulisi arvottaa, mikä on käytännössä mahdotonta
- Jos hyötyfunktio heijastaa käytettyä tuloksellisuusmittaa, niin periaatteen mukaan toimiva agentti saavuttaa parhaan mahdollisen tuloksen yli mahdollisten toimintaympäristöjen
- Mallinnetaan epädeterminististä toimintoa *arvonnalla* (lottery) L, jossa mahdollisiin tuloksiin $C_1, \dots, C_n$ liittyvät todennäköisyydet $p_1, \dots, p_n$

$$L = [p_1, C_1; p_2, C_2; \dots; p_n, C_n]$$

$A \succ B$ Agentti preferoi arvontaa A
$A \sim B$ agentille A ja B ovat samanarvoisia
$A \succeq B$ agentti preferoi A:ta tai A ja B ovat sille samanarvoisia

- Deterministinen arvonta $[1, A] \equiv A$
- Preferenssirelaatiolle asetetaan rationaalisuuden nimissä seuraavat rajoitteet
  - **Järjestyvyys**: agentin on kyettävä suhtauttamaan mitkä tahansa kaksi tilaa keskenään, valitsemaan niiden väliltä
    $$(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$$
  - **Transitiivisuus:**
    $$(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$$

- **Jatkuvuus**:
  $$A \succ B \succ C \Rightarrow \exists\, p: [p, A; 1-p, C] \sim B$$
- **Korvattavuus**:
  $$A \sim B \Rightarrow [p, A; 1-p, C] \sim [p, B; 1-p, C]$$
- **Monotonisuus**:
  $$A \succ B \Rightarrow (p \geq q \Leftrightarrow [p, A; 1-p, B] \succeq [q, A; 1-q, B])$$
- **Jaettavuus**: Sisäkkäiset arvonnat voidaan todennäköisyyslaskennan sääntöjen mukaan purkaa
  $$[p, A; 1-p, [q, B; 1-q, C]] \sim [p, A; (1-p)q, B; (1-p)(1-q), C]$$

- Huom.: ei mainintaa hyödyistä

1. **Hyötyperiaate**:
   Jos agentin preferenssit noudattavat edellä olleita aksioomia, niin on olemassa reaaliarvoinen funktio U s.e.

$$U(A) > U(B) \Leftrightarrow A \succ B$$
$$U(A) = U(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

2. **Odotetun hyödyn maksimoimisen periaate**:
   Arvonnan hyöty on

$$U([p_1, S_1; \ldots; p_n, S_n]) = \Sigma_{i=1,\ldots,n} p_i \cdot U(S_i)$$

   Täten epädeterministisen toiminnon hyöty on kuten aiemmin esitimme

Hyötyfunktioita

- Rahavarat vaikuttaisi suoraviivaiselta hyötymitalta
- Agentti preferoi monotonisesti rahaa
- Rahan arvonnoillekin on määrättävä toimintamalli
  - Olemme voittaneet tietokilpailussa miljoonan
  - Tarjolla on kolikonheitto, jossa kruuna tietää kaiken rahan häviämistä ja klaava puolestaan kolmen miljoonan voittoa
  - Onko ainoa rationaalinen valinta odotusarvoltaan puolentoista miljoonan tarjouksen hyväksyminen?

- Oikeasti kyseessä onkin varallisuuden (ei voiton) maksimointi

- Hyödyn aksioomat eivät määrää yksikäsitteistä hyötyfunktiota
- Voimme esim. tehdä funktiolle $U(S)$ lineaarisen muunnoksen

$$U'(S) = k_1 + k_2 \cdot U(S)$$

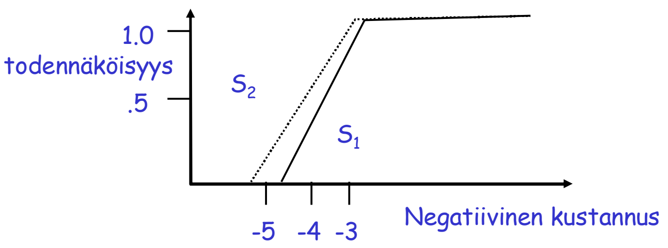
  (k_1 on vakio, k_2 on mielivaltainen positiivinen vakio) ilman, että agentin käyttäytyminen muuttuu
- Deterministisessä maailmassa, jossa ei ole arvontoja, mikä tahansa monotoninen muunnos säilyttää agentin käytöksen
- Esim. $\sqrt[3]{(U(S))}$
- Hyötyfunktio on tällöin ordinaalinen — se antaa tiloille järjestyksen, numeerisilla arvoilla ei ole merkitystä

- Hyötyarvojen skaala käy parhaasta mahdollisesta palkinnosta $u_\top$ pahimpaan katastrofiin $u_\perp$
- *Normalisoidulla hyödyllä* $u_\perp = 0$ ja $u_\top = 1$
- Ääriarvojen väliin jäävän tilan S arvottamiseksi agentti voi verrata sitä standardiarvontaan $[p, u_\top; 1\text{-}p, u_\perp]$
- Todennäköisyyttä p on säädettävä kunnes agentin mielestä standardiarvonta ja S ovat samanarvoisia
- Jos käytössä on normalisoidut hyödyt, niin lopullinen p on S:n hyötyarvo
- Usein hyötyarvo on monen muuttujan (attribuutin) $\mathbf{X} = X_1, \ldots, X_n$ arvojen $\mathbf{x} = [x_1, \ldots, x_n]$ määräämä

- Tarkastellaan tilannetta, missä muiden arvojen ollessa samat, attribuutin korkeampi arvo tietää myös korkeampaa hyötyfunktion arvoa
- Jos attribuuttivektoreille **x** ja **y** pätee $x_i \geq y_i \quad \forall\, i$, niin **x** *dominoi (aidosti)* **y**:tä
- Jos esim. lentokentän mahdollinen sijoituspaikka S_1 on halvempi, tuottaa vähemmän äänisaastetta ja on turvallisempi kuin S_2, niin jälkimmäistä ei enää tarvitse harkita
- Epävarmuuden vallitessa aidot dominointisuhteet ovat harvinaisempia kuin deterministisessä tapauksessa
- *Stokastinen dominanssi* on usein käyttökelpoinen vertailutapa

- Jos lentokentän sijoittamiskustannuksen uskotaan olevan tasaisesti jakautunut välille
  - S_1: 2.8 ja 4.8 miljardia euroa
  - S_2: 3.0 ja 5.2 miljardia euroa

  niin kumulatiivisia jakaumia tarkastelemalla havaitaan S_1:n dominoivan stokastisesti S_2:ta (koska kustannukset ovat negatiivisia)



- Kumulatiivinen jakauma on alkuperäisen jakauman integraali
- Olk. tapahtumien A_1 ja A_2 jakaumat attribuutille X $p_1(x)$ ja $p_2(x)$
- A_1 dominoi stokastisesti A_2:ta, jos

$$\forall x: \int_{-\infty,\dots,x} p_1(x')\,dx' \leq \int_{-\infty,\dots,x} p_2(x')\,dx'$$

- Jos
  - A_1 dominoi stokastisesti A_2:ta ja
  - $U(x)$ on mv. monotonisesti ei-vähenevä hyötyfunktio,

  niin A_1:n odotusarvoinen hyöty on vähintään yhtä korkea kuin A_2:n
- Jos jokin toiminto on toisen dominoima kaikkien attribuuttien suhteen, niin se voidaan jättää huomiotta