

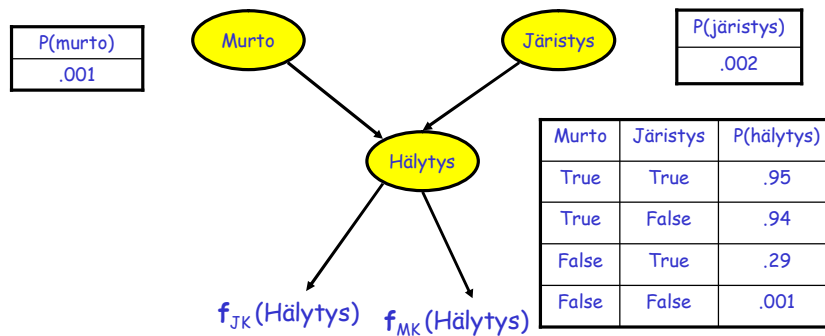
## Muuttujien eliminointi

- Toistuvat alilauseet voidaan evaluoida kerran ja niiden arvo talletetaan käytettäväksi aina tarvittaessa
- Tarkastellaan muuttujien eliminointi -algoritmia lausekkeen  $P(\text{Murto} \mid \text{jussikäy}, \text{meerikäy})$  evaluoinnissa:

$$\alpha \frac{P(\text{Murto})}{M} \sum_j \frac{P(j)}{J} \sum_h \frac{P(h \mid \text{Murto}, j)}{H} \cdot \frac{P(\text{jussikäy} \mid h)}{JK} \frac{P(\text{meerikäy} \mid h)}{MK}$$

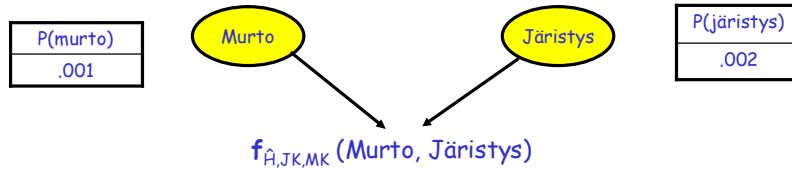
- Edellä on tekijöille otettu lyhennysmerkinnät
- Tekijä  $MK$ ,  $P(\text{meerikäy} \mid h)$ , ei vaadi yli muuttujan  $\text{MeeriKäy}$  summaamista, koska arvo  $\text{meerikäy}$  on kiinnitetty

- Talletetaan todennäköisyydet 2-alkioiseen vektoriin  $\mathbf{f}_{MK}(\text{Hälytys}) = [P(\text{meerikäy} \mid \text{hälytys}), P(\text{meerikäy} \mid \text{-hälytys})]^T$
- Tekijälle  $JK$  talletetaan samanlainen vektori  $\mathbf{f}_{JK}(\text{Hälytys})$



- Tekijä  $H$  on  $P(h \mid \text{Murto}, j)$  ja se vaatii  $2 \times 2 \times 2$  matriisin  $f_H(\text{Hälytys}, \text{Murto}, \text{Järistys})$
- Tekijöiden  $MK$ ,  $JK$  ja  $H$  tulosta summataan **Hälytys** pois, jolloin saadaan yli muuttujien **Murto** ja **Järistys** arvoalueiden käyvä  $2 \times 2$  matriisi

$$f_{A,JK,MK}(\text{Murto}, \text{Järistys}) = \sum_h f_H(h, \text{Murto}, \text{Järistys}) \times f_{JK}(h) \times f_{MK}(h) = f_H(\text{hälytys}, \text{Murto}, \text{Järistys}) \times f_{JK}(\text{hälytys}) \times f_{MK}(\text{hälytys}) + f_H(\text{-hälytys}, \text{Murto}, \text{Järistys}) \times f_{JK}(\text{-hälytys}) \times f_{MK}(\text{-hälytys})$$



## Kahden matriisin pisteittäisen tulon laskeminen

A	B	$f_1(A,B)$	B	C	$f_2(B,C)$
T	T	.3	T	T	.2
T	F	.7	T	F	.8
F	T	.9	F	T	.6
F	F	.1	F	F	.4

A	B	C	$f_3(A,B,C)$
T	T	T	.3 × .2
T	T	F	.3 × .8
T	F	T	.7 × .6
T	F	F	.7 × .4
F	T	T	.9 × .2
F	T	F	.9 × .8
F	F	T	.1 × .6
F	F	F	.1 × .4

- Vastaavasti muuttuja **Järistys** summataan pois tulosta  
 $f_J(\text{Järistys}) \times f_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}, \text{Järistys})$ , jolloin saadaan matriisi

$$f_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}) = f_J(\text{järistys}) \times f_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}, \text{järistys}) + f_J(\neg\text{järistys}) \times f_{\hat{A},JK,MK}(\text{Murto}, \neg\text{järistys})$$

P(murto)
.001

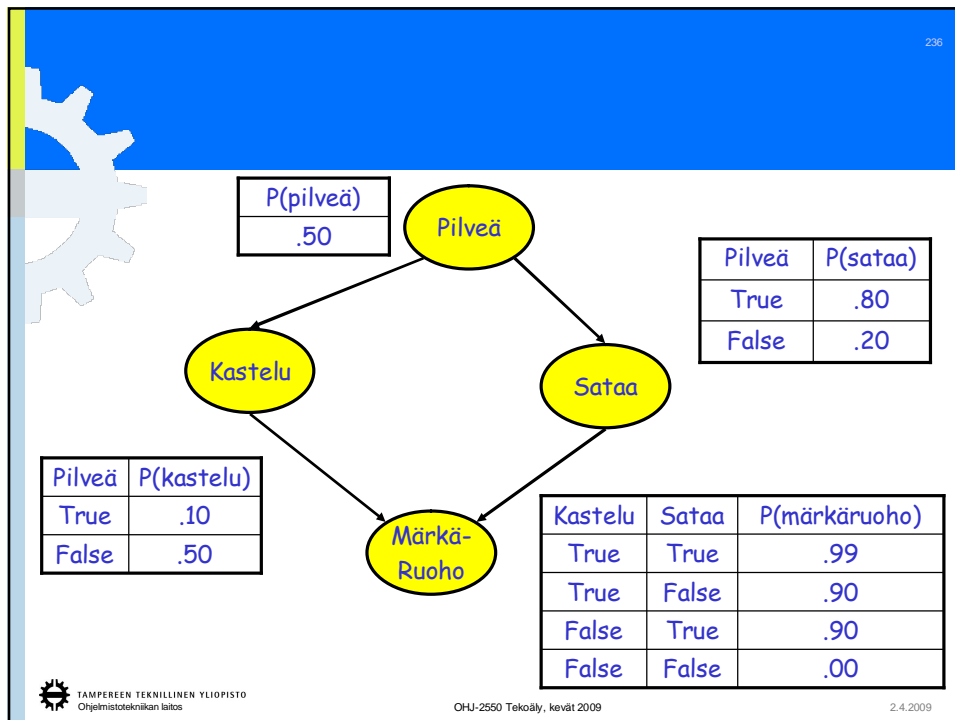

 $f_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto})$ 

- Lopulta saadaan kyselyn  $P(\text{Murto} \mid \text{jussikäy}, \text{meerikäy})$  vastaus  
 $\propto f_M(\text{Murto}) \times f_{\hat{J},\hat{A},JK,MK}(\text{Murto})$ ,  
 missä  $f_M(\text{Murto}) = P(\text{Murto})$
- Muuttujien summaamisessa pois voidaan tekijät, jotka eivät riipu muuttujan arvosta, siirtää summauksen ulkopuolelle
- Kyselyn kannalta irrelevantit tekijät voidaan poistaa
- Kysely  $P(\text{JussiKäy} \mid \text{murto})$  antaa lauseen, jonka viimeinen tekijä on  $\sum_h \dots \sum_{mk} P(\text{meerikäy} = mk \mid \text{Hälytys} = h)$ , jonka arvo määritelmän mukaan on 1
- Verkon solmut, jotka eivät ole kyselymuuttujan esi-isiä tai havaintomuuttujia ovat kyselyn kannalta irrelevanteja

- Bayes-verkko on *monipuu* (polytree), jos kunkin solmuparin välillä on korkeintaan yksi suuntaamaton polku
- Tarkan päättelyn aika- ja tilavaativuus monipuussa on verknon koon suhteen lineaarista
- Päättely Bayes-verkossa sisältää erikoistapauksenaan propositiologiikan päättelyn
- Näin ollen yleisessä tapauksessa päättely Bayes-verkossa on NP-kovaa
- Itse asiassa voidaan osoittaa, että päättely on yhtä vaativaa kuin toteuttavien arvoasetusten lukumäärän laskeminen
- Ongelma on aidosti vaikeampi kuin NP-kova, se on #P-kova

## Approksimatiivinen päättely

- Koska tarkka päättely on laskennallisesti vaativaa, niin on syytä tarkastella ratkaisujen approksimointia
- Approksimointi perustuu satunnaiseen otantaan tunnetusta todennäköisyysjakaumasta
- Esim. painottamaton kolikko voidaan mieltää satunnaismuuttujaksi *Lantti*, jonka arvoalue on [*kruuna*, *klaava*] ja prioritodennäköisyys  $P(\text{Lantti}) = [0.5, 0.5]$
- Otanta tästä jakaumasta vastaa kolikon heittoa, todennäköisyydellä 0.5 tuloksena on *kruuna* ja todennäköisyydellä 0.5 *klaava*
- Jos satunnaislukugeneraattori, jolta saadaan lukuja väliltä [0, 1], niin minkä tahansa yhden muuttujan jakaumasta voidaan helposti tehdä otantaa



## Prioriotanta

- Bayes-verkosta, johon ei liity havaintoja, otantaa voidaan tehdä muuttuja kerrallaan topologisessa järjestyksessä
- Kun vanhempien arvot on arvottu, niin tiedetään minkä jakauman perusteella otanta lapsessa on tehtävä
- Kiinnitetään esimerkkiverkon solmuille topologinen järjestys **[Pilveä, Kastelu, Sataa, MärkäRuoho]**
  1. Vedetään jakaumasta  $P(\text{Pilveä}) = [0.5, 0.5]$  satunnainen arvo, esim. **True**
  2. Vedetään jakaumasta  $P(\text{Kastelu} \mid \text{pilveä}) = [0.1, 0.9]$  satunnainen arvo, esim. **False**
  3. Vedetään jakaumasta  $P(\text{Sataa} \mid \text{pilveä}) = [0.8, 0.2]$  satunnainen arvo, esim. **True**
  4. Vedetään jakaumasta  $P(\text{MärkäRuoho} \mid \neg\text{kastelu, sataa}) = [0.9, 0.1]$  satunnainen arvo, esim. **True**



- Verkon määramästä prioryhteisjakaumasta nyt vedetty tapahtuma siis on [True, False, True, True]
- Merkitään todennäköisyyttä, että prioritanta vetää tietyn tapahtuman  $S_{PO}(x_1, \dots, x_n)$
- Otantamenetelmän perusteella se on
 
$$\prod_{i=1, \dots, n} P(x_i \mid \text{vanhemmat}(X_i))$$
- Toisaalta tämä on tapahtuman todennäköisyys Bayes-verkon esittämässä yhteisjakaumassa, joten
 
$$S_{PO}(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n)$$
- Merk. tapahtuman  $x_1, \dots, x_n$  frekvenssiä  $N_{PO}(x_1, \dots, x_n)$  yhteensä  $N$ :n otospisteen joukossa



- Tapahtuman otantafrekvenssi konvergoituu rajalla odotusarvoonsa
 
$$\lim_{N \rightarrow \infty} N_{PO}(x_1, \dots, x_n)/N = S_{PO}(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_n)$$
- Esim.  $S_{PO}([True, False, True, True]) = 0.5 \times 0.9 \times 0.8 \times 0.9 = 0.324$ , joten kun  $N$  on iso, niin odotamme, että 32.4% otospisteistä on tämä tapahtuma
- Menetelmän antama arvio on *konsistentti* siinä mielessä, että todennäköisyys on eksakti rajalla
- Osittain määrätyn tapahtuman  $x_1, \dots, x_m$ ,  $m \leq n$ , todennäköisyydelle saadaan myös konsistentti estimaatti
 
$$P(x_1, \dots, x_m) \approx N_{PO}(x_1, \dots, x_m)/N$$
- Otoksesta arvioitua todennäköisyyttä merk.  $P_{data}(\cdot)$

## Hylkäysotanta

- Ehdollisen todennäköisyyksien  $P(X | e)$  arvioimiseksi voitaisiin käyttää seuraavaa otantamenetelmää
  - Vedetään otos verkon määräämästä priorijakaumasta
  - Hylätään kaikki otospisteet, jotka eivät toteuta havaintoja  $e$
  - Arvon  $P_{data}(X = x | e)$  määrittämiseksi lasketaan kuinka suuressa osassa jäljellejääneistä otospisteistä pätee  $X = x$
- Menetelmän antama jakauma  $P_{data}(X | e)$  on algoritmin perusteella

$$\propto N_{PO}(X, e) = N_{PO}(X, e) / N_{PO}(e)$$

- Osittain määrätyn tapahtuman todennäköisyyden arviona tämä on konsistentti estimaatti

$$P_{data}(X | e) \approx P(X, e) / P(e) = P(X | e)$$

- Vedetään 100 otospistettä jakauman  $P(\text{Sataa} | \text{kastelu})$  estimoimiseksi
  - Saamistamme tapahtumista 73, joilla pätee  $\text{Kastelu} = \text{False}$ , hylätään
  - Lopuilla tapahtumilla pätee  $\text{kastelu}$
  - Näistä 8:ssä tapauksessa  $\text{Sataa} = \text{True}$  ja 19:ssä  $\text{False}$
- Tässä tapauksessa  $P_{data}(\text{Sataa} | \text{kastelu}) \approx [0.296, 0.704]$ , kun todellinen jakauma on  $[0.3, 0.7]$
- Suurempi otos tuottaa tarkemman estimaatin
- Tn. arvioiden virheen hajonta on suhteessa osamäärään  $1/\sqrt{n}$ , missä  $n$  on otospisteiden lukumäärä
- Turhaan vedettyjen otospisteiden suuri määrä on ongelma: havaintojen kanssa konsistenttien otospisteiden lukumäärä putoaa eksponentiaalisesti ehtomuuttujien lkm:n kasvaessa

## Painotusotanta

- Turhaan hylättävien otospisteiden vetämisen välttämiseksi kiinnitetään havaintomuuttujien **E** arvot ja tehdään otanta vain muuttujien **X** ja **Y** yli
- Vedetyt tapahtumat eivät kuitenkaan kaikki ole samanarvoisia
- Tapahtumia painotetaan uskonusarvoilla (likelihood)
- Kuinka uskottavasti tapahtuma vastaa havaintoja mitattuna havaintomuuttujien ehdollisten todennäköisyyksien tulolla annettuna niiden vanhemmat
- Intuitiivisesti ajatellen tapahtumille, joissa havaintojen yhdessä esiintyminen vaikuttaa epäuskottavalta, annetaan vähemmän painoarvoa

- Kyselyyn  $P(\text{Sataa} \mid \text{kastelu, märkäruoho})$  vastaamiseksi painoarvo  $w$  alustetaan arvoon 1.0
- Vedetään otos jakaumasta  $P(\text{Pilveä}) = [0.5, 0.5]$ , esim. arvo **True**
- Koska **Kastelu** on havaintomuuttuja, jonka arvo on **True**, niin painoa päivitetään  $w \leftarrow w \times P(\text{kastelu} \mid \text{pilveä}) = 0.1$
- Vedetään otos jakaumasta  $P(\text{Sataa} \mid \text{pilveä}) = [0.8, 0.2]$ , esim. arvo **True**
- **MärkäRuoho** on havaintomuuttuja, jonka arvo on **True**  $\Rightarrow$   
 $w \leftarrow w \times P(\text{märkäruoho} \mid \text{kastelu, sataa}) = 0.099$
- Saatiin siis esimerkki  $[\text{True}, \text{True}, \text{True}, \text{True}]$  tapauksesta  $\text{Sataa} = \text{True}$  painoltaan 0.099

- Merkitään  $Z = \{ X \} \cup Y$
- Otopisteitä painottava otanta arpoo kullekin muuttujista  $Z$  arvon annettuna sen vanhempien arvot

$$S_w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1, \dots, j} P(z_i \mid \text{vanhemmat}(Z_i))$$

- Vanhemmat( $Z_i$ ) voi sisältää niin havainto- kuin piilomuuttujiakin
- Painottava otanta siis ottaa havainnot paremmin huomioon kuin priorijakauma  $P(\mathbf{z})$
- Toisaalta  $S_w$  ottaa huomioon vain kunkin muuttujan  $Z_i$  esi-isiin lukeutuvat havainnot
- Todellinen posteriorijakauma  $P(\mathbf{z} \mid \mathbf{e})$  huomioi kaikki havainnot

- Uskottavuuspainot  $w$  korjaavat jakaumien eron
- Olkoon otopiste  $x$  muodostunut muuttujien arvoista  $\mathbf{z}$  ja  $\mathbf{e}$ , jolloin

$$w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) = \prod_{i=1, \dots, m} P(e_i \mid \text{vanhemmat}(E_i))$$

- Täten otopisteen painotettu todennäköisyys  $S_w(\mathbf{z}, \mathbf{e}) \cdot w(\mathbf{z}, \mathbf{e})$  on

$$\prod_{i=1, \dots, j} P(z_i \mid \text{vanhemmat}(Z_i)) \cdot \prod_{i=1, \dots, m} P(e_i \mid \text{vanhemmat}(E_i)) \\ = P(\mathbf{z}, \mathbf{e}),$$

koska tulojen muuttajat kattavat kaikki verkon muuttajat

- Nyt voidaan osoittaa, että painotusotannan estimaatit ovat konsistentteja

$$\begin{aligned}
 P_{\text{data}}(x | e) &= \alpha \sum_y N_w(x, y, e) w(x, y, e) \\
 &\approx \alpha' \sum_y S_w(x, y, e) w(x, y, e) \\
 &= \alpha' \sum_y P(x, y, e) \\
 &= \alpha' P(x, e) \\
 &= P(x | e)
 \end{aligned}$$

- Painotusotanta on tehokas menetelmä, koska kaikki vedetyt otospisteet hyödynnetään
- Menetelmä kuitenkin kärsii kun havaintomuuttujien lukumäärä kasvaa, koska useimpien otospisteiden paino on hyvin pieni ja harvat pisteet dominoivat estimaattia

## MCMC-algoritmi

- Markov chain Monte Carlo
- Monte Carlo -algoritmi on satunnaisalgoritmi, joka voi tuottaa väärän vastauksen pienellä todennäköisyydellä (vs. Las Vegas -algoritmi)
- Otospisteitä vedetään tekemällä satunnainen muutos edelliseen tapahtumaan
- Seuraava tila valitaan arpomalla arvo yhdelle ei-havaintomuuttujista  $X_i$  ehdollistettuna sen *Markov-peitteeseen* kuuluvien muuttujien nykyisillä arvoilla
- Solmun Markov-peitteeseen kuuluvat sen vanhemmat, lapset ja lapsien vanhemmat
- MCMC tuottaa satunnaiskulun tila-avaruudessa, jossa havaintomuuttujien arvoja ei muuteta

## 4.2 YKSINKERTAISET PÄÄTÖKSET

- Liitetään tilaan  $S$  numeerinen *hyötyarvio* (utility)  $U(S)$ , joka kuvaa tilan saavuttamisen haluttavuutta
- Epädeterministisen toiminnon  $A$  mahdollisia tulostiloja ovat  $Tulos_i(A)$ , missä  $i$  käy yli eri tulosten
- Ennen toiminnon  $A$  suorittamista sen mahdollisille tuloksille annetaan todennäköisyydet  $P(Tulos_i(A) | Suorita(A), E)$ , missä  $E$  on agentin havainnot
- $A$ :n odotettu hyöty (expected utility):

$$EU(A | E) = \sum_i P(Tulos_i(A) | Suorita(A), E) \cdot U(Tulos_i(A))$$

- *Maksimaalisen odotetun hyödyn periaate* edellyttää rationaalisen agentin valitsevan sen toiminnon, jonka odotusarvoinen hyöty on suurin
- Jos ideaa haluttaisiin soveltaa toimintojonojen valintaan, niin kaikki mahdolliset jonot tulisi arvottaa, mikä on käytännössä mahdotonta
- Jos hyötyfunktio heijastaa käytettyä tuloksellisuusmittaa, niin periaatteen mukaan toimiva agentti saavuttaa parhaan mahdollisen tuloksen yli mahdollisten toimintaympäristöjen
- Mallinnetaan epädeterminististä toimintoa *arvonnalla* (lottery)  $L$ , jossa mahdollisiin tuloksiin  $C_1, \dots, C_n$  liittyvät todennäköisyydet  $p_1, \dots, p_n$

$$L = [p_1, C_1; p_2, C_2; \dots; p_n, C_n]$$



$A \succ B$  Agentti preferoi arvontaa  $A$   
 $A \sim B$  agentille  $A$  ja  $B$  ovat samanarvoisia  
 $A \succeq B$  agentti preferoi  $A$ :ta tai  $A$  ja  $B$  ovat sille samanarvoisia

- Deterministinen arvonta  $[1, A] \equiv A$
- Preferenssirelaatiolle asetetaan rationaalisuuden nimissä seuraavat rajoitteet
  - **Järjestyvyys:** agentin on kyettävä suhtauttamaan mitkä tahansa kaksi tilaa keskenään, valitsemaan niiden väliä
 
$$(A \succ B) \vee (B \succ A) \vee (A \sim B)$$
  - **Transitiivisuus:**

$$(A \succ B) \wedge (B \succ C) \Rightarrow (A \succ C)$$



- **Jatkuvuus:**

$$A \succ B \succ C \Rightarrow \exists p: [p, A; 1-p, C] \sim B$$
- **Korvattavuus:**

$$A \sim B \Rightarrow [p, A; 1-p, C] \sim [p, B; 1-p, C]$$
- **Monotonisuus:**

$$A \succ B \Rightarrow (p \geq q \Leftrightarrow [p, A; 1-p, B] \succeq [q, A; 1-q, B])$$
- **Jaettavuus:** Sisäkkäiset arvonnat voidaan todennäköisyyslaskennan sääntöjen mukaan purkaa
 
$$[p, A; 1-p, [q, B; 1-q, C]] \sim [p, A; (1-p)q, B; (1-p)(1-q), C]$$

- Huom.: ei mainintaa hyödyistä

### 1. Hyötyperiaate:

Jos agentin preferenssit noudattavat edellä olleita aksioomia, niin on olemassa reaaliarvoinen funktio  $U$  s.e.

$$U(A) > U(B) \Leftrightarrow A \succ B$$

$$U(A) = U(B) \Leftrightarrow A \sim B$$

### 2. Odotetun hyödyn maksimoimisen periaate:

Arvonnan hyöty on

$$U([p_1, S_1; \dots; p_n, S_n]) = \sum_{i=1, \dots, n} p_i \cdot U(S_i)$$

Täten epädeterministisen toiminnon hyöty on kuten aiemmin esitimme

## Hyötyfunktioita

- Rahavarat vaikuttaisi suoraviivaiselta hyötymitalta
- Agentti preferoi monotonisesti rahaa
- Rahan arvonnoillekin on määrättävä toimintamalli
  - Olemme voittaneet tietokilpailussa miljoonan
  - Tarjolla on kolikonheitto, jossa kruuna tietää kaiken rahan häviämistä ja klaava puolestaan kolmen miljoonan voittoa
  - Onko ainoa rationaalinen valinta odotusarvoltaan puolentoista miljoonan tarjouksen hyväksyminen?
- Oikeasti kyseessä onkin varallisuuden (ei voiton) maksimointi



- Hyödyn aksioomat eivät määrää yksikäsitteistä hyötyfunktiota
- Voimme esim. tehdä funktiolle  $U(S)$  lineaarisen muunnoksen  

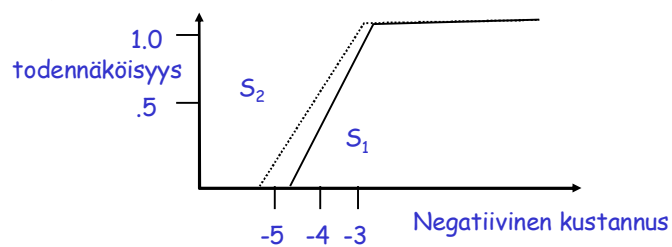
$$U'(S) = k_1 + k_2 \cdot U(S)$$
( $k_1$  on vakio,  $k_2$  on mielivaltainen positiivinen vakio) ilman, että agentin käyttäytyminen muuttuu
- Deterministisessä maailmassa, jossa ei ole arvontoja, mikä tahansa monotoninen muunnos säilyttää agentin käytöksen
- Esim.  $\sqrt[3]{U(S)}$
- Hyötyfunktio on tällöin ordinaalinen — se antaa tiloille järjestyksen, numeerisilla arvoilla ei ole merkitystä



- Hyötyarvojen skaala käy parhaasta mahdollisesta palkinnosta  $u_T$  pahimpaan katastrofiin  $u_L$
- *Normalisoidulla hyödyllä*  $u_L = 0$  ja  $u_T = 1$
- Ääriarvojen väliin jäävän tilan  $S$  arvottamiseksi agentti voi verrata sitä standardiarvontaan  $[p, u_T; 1-p, u_L]$
- Todennäköisyyttä  $p$  on säädettävä kunnes agentin mielestä standardiarvonta ja  $S$  ovat samanarvoisia
- Jos käytössä on normalisoidut hyödyt, niin lopullinen  $p$  on  $S$ :n hyötyarvo
- Usein hyötyarvo on monen muuttujan (attribuutin)  $X = X_1, \dots, X_n$  arvojen  $x = [x_1, \dots, x_n]$  määräämä

- Tarkastellaan tilannetta, missä muiden arvojen ollessa samat, attribuutin korkeampi arvo tietää myös korkeampaa hyötyfunktion arvoa
- Jos attribuuttivektoreille  $x$  ja  $y$  pätee  $x_i \geq y_i \quad \forall i$ , niin  $x$  dominoi (aidosti)  $y$ :tä
- Jos esim. lentokentän mahdollinen sijoituspaikka  $S_1$  on halvempi, tuottaa vähemmän äänisaastetta ja on turvallisempi kuin  $S_2$ , niin jälkimmäistä ei enää tarvitse harkita
- Epävarmuuden vallitessa aidot dominointisuhteet ovat harvinaisempia kuin deterministisessä tapauksessa
- *Stokastinen dominanssi* on usein käyttökelpoinen vertailutapa

- Jos lentokentän sijoittamiskustannuksen uskotaan olevan tasaisesti jakautunut välille
    - $S_1$ : 2.8 ja 4.8 miljardia euroa
    - $S_2$ : 3.0 ja 5.2 miljardia euroa
- niin kumulatiivisia jakaumia tarkastelemalla havaitaan  $S_1$ :n dominoivan stokastisesti  $S_2$ :ta (koska kustannukset ovat negatiivisia)





- Kumulatiivinen jakauma on alkuperäisen jakauman integraali
- Olk. tapahtumien  $A_1$  ja  $A_2$  jakaumat attribuutille  $X$   $p_1(x)$  ja  $p_2(x)$
- $A_1$  dominoi stokastisesti  $A_2$ :ta, jos
 
$$\forall x: \int_{-\infty, \dots, x} p_1(x') dx' \leq \int_{-\infty, \dots, x} p_2(x') dx'$$
- Jos
  - $A_1$  dominoi stokastisesti  $A_2$ :ta ja
  - $U(x)$  on mv. monotonisesti ei-vähenevä hyötyfunktio,
 niin  $A_1$ :n odotusarvoinen hyöty on vähintään yhtä korkea kuin  $A_2$ :n
- Jos jokin toiminto on toisen dominoima kaikkien attribuuttien suhteen, niin se voidaan jättää huomiotta