

2. Diskreetit

satunnaismuuttujat ja odotusarvo

- ★ Todennäköisyysavaruuden $(\Omega, \mathcal{F}, \Pr)$ satunnaismuuttuja X on kuvaus $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, s.e. kaikille $a \in \mathbb{R}$
$$\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} \in \mathcal{F}$$
- ★ Yleensä s-muuttujan argumentti jätetään merkitsemättä, koska se vastaa aina yhtä tn-avaruuden koetta: $\Pr(X \leq a)$
- ★ Diskreetti s-muuttuja on funktio, jonka arvojoukko on äärellinen tai numeroituva \mathbb{R} :n osajoukko
- ★ Yleisimmin olemme kiinnostuneita kokonaislukuarvoisista diskreeteistä satunnaismuuttujista

37

- ★ Kahden nopan heitossa on 36 yhtä todennäköistä (toisensa poissulkevaa) alkeistapausta
- ★ Useimmiten ollaan kuitenkin kiinnostuneita silmälukujen summaa vastaavasta diskreetistä s-muuttujasta Z , jolla on 11 mahdollista arvoa
- ★ Esim. $\Pr(Z = 4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$, sillä alkeistapauksista $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ johtavat summaan 4
- ★ S-muuttujat X_1, \dots, X_k ovat toisistaan riippumattomia joss millä tahansa $I \subseteq [1, k]$ ja kaikilla x_1, \dots, x_k

$$\Pr\left(\bigcap_{i \in I} X_i = x_i\right) = \prod_{i \in I} \Pr(X_i = x_i)$$

38

ODOTUSARVO

- ★ S-muuttujaa kuvaava arvo on odotusarvo, joka on tn:llä painotettu keskiarvo sen saamista arvoista
- ★ Diskreetin s-muuttujan X odotusarvo on $\mathbf{E}[X] = \sum_x x \Pr(X = x)$, missä summaus käy yli X :n arvojoukon
- ★ Jos summa $\sum_x |x| \Pr(X = x)$ suppenee, niin $\mathbf{E}[X]$ on äärellinen, muuten merk. $\mathbf{E}[X] = \infty$
- ★ $\mathbf{E}[Z] = 2 \frac{1}{36} + 3 \frac{2}{36} + 4 \frac{3}{36} + \dots + 12 \frac{1}{36} = 7$
- ★ Olk. Y diskreetti s-muuttuja, joka saa arvon 2^i tn:llä 2^{-i} kaikilla $i = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{E}[Y] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^i \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} 1 = \infty$$

39

Lause 2.1 (odotusarvon lineaarisuus): Olk. X_1, \dots, X_n äärellinen määrä mv. diskreettejä s-muuttujia, joilla on äärelliset odotusarvot. Tällöin

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i].$$

Todistus. Summaukset seuraavassa ovat yli s-muuttujien arvoalueiden.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X + Y] &= \sum_i \sum_j (i + j) \Pr((X = i) \cap (Y = j)) \\ &= \sum_i i \sum_j \Pr((X = i) \cap (Y = j)) \\ &\quad + \sum_j j \sum_i \Pr((X = i) \cap (Y = j)) \end{aligned}$$

Koska 1. summassa j käy yli Y :n ar-

40

voaluen, niin kokonaistn.:n (lause 1.6) perusteella

$$\begin{aligned} &= \sum_i i\Pr(X = i) + \sum_j j\Pr(Y = j) \\ &= \mathbf{E}[X] + \mathbf{E}[Y]. \end{aligned}$$

Todistuksen loppuunsaattamiseksi voidaan käyttää induktiota. \square

- ★ Lineaarisuus helpottaa odotusarvon laskemista oleellisesti
- ★ S-muuttujien ei tarvitse olla riippumattomia
- ★ Numeroituvasti äärettömissä summauksissa odotusarvon lineaarisuus pätee esim. kun $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{E}[|X_i|]$ supenee ja odotusarvot $\mathbf{E}[X_i]$ ovat äärellisiä

41

Lemma 2.2: Mille tahansa vakiolle c ja diskreetille s -muuttujalle X pätee

$$\mathbf{E}[cX] = c\mathbf{E}[X].$$

Todistus. Tapaus $c = 0$ on selvä. Olk. nyt $c \neq 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[cX] &= \sum_j j\Pr(cX = j) \\ &= c \sum_j (j/c)\Pr(X = j/c) \\ &= c \sum_k k\Pr(X = k) \\ &= c\mathbf{E}[X] \end{aligned}$$

\square

42

JENSENIN EPÄYHTÄLÖ

- ★ Yleisesti pätee $\mathbf{E}[X^2] \geq (\mathbf{E}[X])^2$
- ★ Tarkastellaan ei-negatiivista s -muuttujaa $Y = (X - \mathbf{E}[X])^2$, jonka odotusarvo myös on ei-negatiivinen
- ★ Odotusarvon lineaarisuutta ja lemma 2.2 käyttäen:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2 - 2X\mathbf{E}[X] + (\mathbf{E}[X])^2] \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 2\mathbf{E}[X\mathbf{E}[X]] + (\mathbf{E}[X])^2 \\ &= \mathbf{E}[X^2] - 2(\mathbf{E}[X])^2 + (\mathbf{E}[X])^2 \\ &= \mathbf{E}[X^2] - (\mathbf{E}[X])^2 \end{aligned}$$

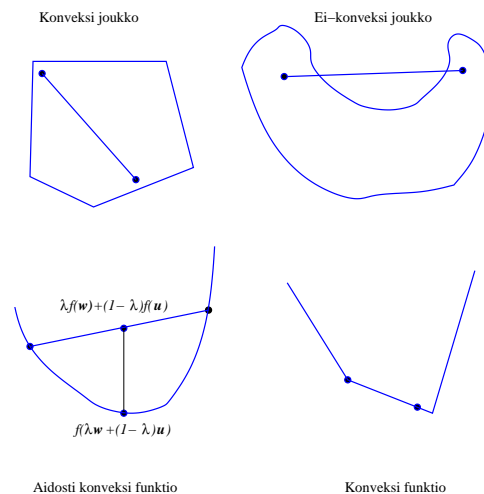
- ★ Se, että $\mathbf{E}[X^2] \geq (\mathbf{E}[X])^2$ on erikoistapaus Jensenin epäyhtälöstä

43

- ★ Funktio $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on *konvekksi*, jos kaikilla $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ja $0 \leq \lambda \leq 1$ pätee

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

Lemma 2.3: Kahdesti derivoituva funktio f on konvekksi jos ja vain jos $f''(x) \geq 0 \forall x$.



Aidosti konvekssi funktio

Konvekssi funktio

44

- ★ Reaalifunktion $f(x)$, joka on $n + 1$ kertaa derivoituva, Taylor-kehitemä (expansion) pisteessä $x = a$ on

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

missä $f^{(k)}(x)$ on f :n k s derivaatta ja $c \in [x, a]$

- ★ Merk. $\mu = \mathbf{E}[X]$
- ★ Kahdesti derivoituvalle konveksille ftiolle f pätee siis, että on olemassa c s.e.

$$f(x) = f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu) + \frac{f''(c)(X - \mu)^2}{2} \\ \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)$$

koska $f''(c) > 0$

45

Lause 2.4 (Jensenin epäyhtälö): Jos f on konvekssi funktio, niin

$$\mathbf{E}[f(X)] \geq f(\mathbf{E}[X]).$$

Todistus. Oletetaan, että f :llä on Taylor-kehitemä. Täten siis

$$f(X) \geq f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu).$$

Ottamalla odotusarvo epäyhtälön molemmista puolesta, soveltamalla odotusarvon lineaarisuutta ja lemmaa 2.2 saadaan haluttu tulos.

$$\mathbf{E}[f(X)] \geq \mathbf{E}[f(\mu) + f'(\mu)(X - \mu)] \\ = \mathbf{E}[f(\mu)] + f'(\mu)(\mathbf{E}[X] - \mu) \\ = \mathbf{E}[f(\mu)] = f(\mu) = f(\mathbf{E}[X])$$

□

46

BINOMIJAKAUMA

- ★ Satunnaismuuttuja Y noudattaa Bernoulli-jakaumaa parametrilla p jos $\Pr(Y = 1) = p$ ja $\Pr(Y = 0) = 1 - p$
- ★ $\mathbf{E}[Y] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$
- ★ Bernoulli-jakaumaa noudattava s-muuttuja on indikaattori(muuttuja), jolla ilmaistaan kokeen onnistumista ja epäonnistumista
- ★ Esim. kolikonheitto
- ★ Jos haluamme tutkia onnistumisten lkm:ää n :ssä riippumattomassa kokeessa, joissa kussakin onnistumistn. on p , niin turvaudumme parametrein n ja p binomijakautuneeseen s-muuttujaan X , merk. $X \sim B(n, p)$

47

- ★ $X \sim B(n, p)$ jos kaikilla $j = 0, 1, \dots, n$

$$\Pr(X = j) = \binom{n}{j} p^j (1 - p)^{n-j}$$

- ★ Olk. $X \sim B(n, p)$, eli X on onnistumisten lkm. n :ssä riippumattomassa kokeessa, joissa kussakin onnistumistn. on p
- ★ Odotusarvon $\mathbf{E}[X]$ määrittämiseksi otetaan indikaattorit, X_1, \dots, X_n s.e. $X_i = 1$ jos koe i on onnistunut
- ★ Kaikilla $i = 1, \dots, n$: $\mathbf{E}[X_i] = p$

- ★ $X = \sum_{i=1}^n X_i$, joten

$$\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] = np$$

48

EHDOLLINEN ODOTUSARVO

$$\mathbf{E}[Y | Z = z] = \sum_y y \Pr(Y = y | Z = z),$$

missä summaus käy yli Y :n arvoalueen

★ Olk. X_1 ja X_2 riippumattomien nopanheittojen tulokset ja $X = X_1 + X_2$

$$\star \mathbf{E}[X | X_1 = 4] = \sum_{x=5}^{10} x \cdot \frac{1}{6} = \frac{15}{2}$$

$$\star \mathbf{E}[X_1 | X = 4] = 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{3} = 2$$

Lemma 2.5: Kaikille s -muuttujille X ja Y pätee

$$\mathbf{E}[X] = \sum_y \Pr(Y = y) \mathbf{E}[X | Y = y]$$

jos odotusarvot ovat olemassa.

49

★ Lineaarisuus pätee myös ehdollisille odotusarvoille

Lemma 2.6: Olk. X_1, \dots, X_n äärellinen kokoelma s -muuttujia, joilla on äärelliset odotusarvot, ja Y mv. s -muuttuja. Tällöin

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i | Y = y\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i | Y = y].$$

★ Ehdollinen odotusarvo on myös satunnaismuuttuja $\mathbf{E}[Y | Z]$, jonka arvo on $\mathbf{E}[Y | Z = z]$ kun $Z = z$

★ $\mathbf{E}[Y | Z]$ on siis Z :n funktio

★ Perusjoukon Ω s -muuttujat Y ja Z ovat funktioita $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

★ $\mathbf{E}[Y | Z] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ s.e. $\mathbf{E}[Y | Z](\omega) = \mathbf{E}[Y | Z = Z(\omega)]$ kaikilla $\omega \in \Omega$

50

★ Olk. X_1 ja X_2 riippumattomien nopanheittojen tulokset ja $X = X_1 + X_2$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X | X_1] &= \sum_x x \Pr(X = x | X_1) \\ &= \sum_{x=X_1+1}^{X_1+6} x \cdot \frac{1}{6} \\ &= X_1 + \frac{7}{2} \end{aligned}$$

★ Koska $\mathbf{E}[Y | Z]$ on s -muuttuja, niin voidaan tarkastella sen odotusarvoa $\mathbf{E}[\mathbf{E}[Y | Z]]$

$$\mathbf{E}[\mathbf{E}[X | X_1]] = \mathbf{E}\left[X_1 + \frac{7}{2}\right] = 7 = \mathbf{E}[X]$$

★ Tämä pätee yleisesti:

Lause 2.7: $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y | Z]]$.

51

HAARAUTUVAT PROSESSIT

(branching processes)

★ Ohjelmasta kutsutaan prosessia \mathcal{S} yhden kerran

★ Jokainen \mathcal{S} :n kutsu luo uusia prosessin kopioita

★ Oletetaan \mathcal{S} :n luomien kopioiden lkm:n olevan jakautunut $B(n, p)$

★ Mikä on käynnistettyjen prosessien lukumäärän odotusarvo?

★ Olk. Y_i prosessien lkm sukupolvessa i

★ $Y_0 = 1$ ja $Y_1 \sim B(n, p)$, joten $\mathbf{E}[Y_1] = np$

★ Kiinnitetään nyt i

★ Olk. Z_k sukupolven $i - 1$ prosessin numero k jälkeläisten lkm; $Z_k \sim B(n, p)$

52

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_i | Y_{i-1} = y_{i-1}] &= \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k | Y_{i-1} = y_{i-1}\right] \\ &= \sum_{j \geq 0} j \Pr\left(\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k = j | Y_{i-1} = y_{i-1}\right) \end{aligned}$$

★ Kukin Z_k on riippumaton binomijakautunut s -muuttuja, erityisesti Z_k ei riipu muuttujasta Y_{i-1} , joten

$$\begin{aligned} &= \sum_{j \geq 0} j \Pr\left(\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k = j\right) \\ &= \mathbf{E}\left[\sum_{k=1}^{y_{i-1}} Z_k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{y_{i-1}} \mathbf{E}[Z_k] \\ &= y_{i-1} np \end{aligned}$$

53

★ Kokeen onnistumistn. on p . Suoriteetaan kokeita kunnes saavutetaan 1. onnistuminen. Tässä tilanteessa vallitsee geometrinen jakauma

★ Esim. heitetään kolikkoa kunnes saadaan ensimmäinen kruuna

★ S -muuttuja X noudattaa *geometrista jakaumaa* parametrilla p , merk. $X \sim \text{Geom}(p)$, jos

$$\Pr(X = n) = (1 - p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, \dots$$

★ Geometrinen s -muuttuja on *muistiton*: onnistumistn.:een tästä eteenpäin ei vaikuta aiempien epäonnistumisten lkm

Lemma 2.8: *Olk. X geometrisesti parametrilla p jakautunut ja $n > 0$. Tällöin*

$$\Pr(X = n + k | X > k) = \Pr(X = n).$$

55

★ Lauseen 2.7 perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[Y_i] &= \mathbf{E}[\mathbf{E}[Y_i | Y_{i-1}]] \\ &= \mathbf{E}[Y_{i-1} np] \\ &= np \mathbf{E}[Y_{i-1}] \end{aligned}$$

★ Koska $Y_0 = 1$, saadaan induktiolla

$$\mathbf{E}[Y_i] = (np)^i$$

★ Kaikkiaan prosessin S kopioita siis odotusarvoisesti käynnistetään

$$\mathbf{E}\left[\sum_{i \geq 0} Y_i\right] = \sum_{i \geq 0} \mathbf{E}[Y_i] = \sum_{i \geq 0} (np)^i$$

★ Vain jos kukin prosessi luo odotusarvoisesti alle yhden uuden prosessin kopion ($np < 1$) on kokonaismäärän odotusarvo äärellinen ($1/(1 - np)$)

54

Lemma 2.9: *Olk. X diskreetti geometrisesti parametrilla p jakautunut s -muuttuja, joka saa vain ei-negatiivisia arvoja. Tällöin*

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X \geq i).$$

★ $\sum_{i=k}^{\infty} x^i = x^k / (1 - x)$ kun $0 < x < 1$

★ Geometrisella s -muuttujalla X siis

$$\Pr(X \geq i) = \sum_{n=i}^{\infty} (1 - p)^{n-1} p = (1 - p)^{i-1}$$

★ Josta seuraa, kun X saa vain ei-negatiivisia arvoja

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr(X \geq i) = \sum_{i=1}^{\infty} (1 - p)^{i-1} \\ &= \frac{1}{1 - (1 - p)} = \frac{1}{p} \end{aligned}$$

56

★ Olk. Y indikaattori parametrilla p
("ensimmäinen heitto on kruuna")

★ Lemman 2.5 perusteella $\mathbf{E}[X]$

$$\begin{aligned} &= \Pr(Y = 0) \mathbf{E}[X | Y = 0] \\ &\quad + \Pr(Y = 1) \mathbf{E}[X | Y = 1] \\ &= (1 - p) \mathbf{E}[X | Y = 0] + p \mathbf{E}[X | Y = 1] \end{aligned}$$

★ Kun $Y = 1$ niin $X = 1$, joten
 $\mathbf{E}[X | Y = 1] = 1$

★ Kun $Y = 0$, niin $X > 1$

★ Olk. Z vielä tarvittavien heittojen
lkm, siis ilman ensimmäistä aina
siihen asti kunnes ensimmäinen
kruuna saadaan

57

★ Odotusarvon lineaarisuuden perusteella

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= (1 - p) \mathbf{E}[Z + 1] + p \cdot 1 \\ &= (1 - p) \mathbf{E}[Z] + 1 \end{aligned}$$

★ Muistittomuuden perusteella myös
 $Z \sim \text{Geom}(p)$

★ Koska X :llä ja Z :lla on sama jakauma,
niin $\mathbf{E}[Z] = \mathbf{E}[X]$

$$\mathbf{E}[X] = (1 - p) \mathbf{E}[X] + 1$$

★ Täten siis

$$\mathbf{E}[X] = \frac{1}{p}$$

58

KUPONGINKERÄÄJÄN ONGELMA

★ Kukin muropaketti sisältää yhden
 n :stä mahdollisesta kupongista

★ Paketin sisältämä kuponki jakautunut riippumattomasti ja tasaisesti

★ Tavoitteena on kerätä kaikki n erilais-
ta kuponkia

★ Montako pakettia on ostettava kaik-
kien kuponkien keräämiseksi?

★ Olk. X ostettujen pakettien lkm
kunnes kaikkia kuponkeja on ainakin
yksi kpl

★ Olk. X_i on ostettujen pakettien lkm
kun erilaisia kuponkeja on saatu
täsmälleen $i - 1$

★ Nyt $X = \sum_{i=1}^n X_i$

59

★ Kukin $X_i \sim \text{Geom}(p_i)$, sillä kun $i - 1$
kuponkia on löydetty, niin uuden
kupongin löytämistä on

$$p_i = 1 - \frac{i - 1}{n}$$

★ Saamme odotusarvon

$$\mathbf{E}[X_i] = \frac{1}{p_i} = \frac{n}{n - i + 1}$$

★ Kaikkiaan siis

$$\begin{aligned} \mathbf{E}[X] &= \mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathbf{E}[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{n}{n - i + 1} = n \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \end{aligned}$$

★ $H(n) = \sum_{i=1}^n (1/i)$ on n :s harmoninen
luku; $H(n) = \ln n + \Theta(1)$

★ Siis $\mathbf{E}[X] = n \ln n + \Theta(n)$

60

PIKAJÄRJESTÄMINEN (Quicksort)

Syöte: Lista $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ täysin järjestetyn joukon erillisiä alkioita.

Tulos: S :n alkioit järjestettynä.

1. Jos S :ssä on 0 tai 1 alkioita, palauta S .
2. Valitse yksi S :n alkio x jakoalkioksi (pivot).
3. Vertaa S :n muita alkioita x :ään ja jaa ne kahteen listaan:
 - (a) Listan S_1 alkioit ovat pienempiä kuin x ;
 - (b) Listan S_2 alkioit ovat suurempia kuin x .
4. Pikajärjestä S_1 ja S_2 rekursiivisesti.
5. Palauta lista S_1, x, S_2 .

61

- ★ Pahimmillaan — kun esim. aina valitaa suurin tai pienin alkio jakoalkioksi — pikajärjestäminen vaatii $\Omega(n^2)$ vertailua
- ★ Parhaimmillaan taas molempien listojen S_1 ja S_2 pituus on kork. $\lceil n/2 \rceil$, jolloin tarvittavien vertailujen määrä $C(n)$ saadaan rekursioepäyhtälöstä
$$C(n) \leq 2C(\lceil n/2 \rceil) + \Theta(n)$$
- ★ Ratkaisu $C(n) = O(n \log n)$ on vertailuihin perustuvan järjestämisalgoritmin paras mahdollinen
- ★ Valitaan nyt jakoalkio x satunnaisesti riippumattomasti ja tasaisen jakauman mukaan S :n alkioista

62

★ Olk. S :n alkioit suuruusjärjestyksessä y_1, \dots, y_n

★ Olk. X_{ij} , $i < j$, indikaattori, jonka arvo on 1, jos järjestämisen aikana alkioita y_i ja y_j verrataan

★ Alkioparia ei verrata kahdesti, joten vertailujen kokonaismäärä X on

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n X_{ij}$$

★ Lineaarisuuden perusteella

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \mathbf{E}[X_{ij}]$$

★ Riittää siis saada selville tn. sille, että alkioita y_i ja y_j verrataan algoritmossa

63

- ★ Alkioita y_i ja y_j verrataan algoritmossa, joss jompikumpi valitaan ensimmäiseksi jakoalkioksi joukosta $Y^{ij} = \{y_i, \dots, y_j\}$
- ★ Muuten joukosta valittu ensimmäinen jakoalkio heittää y_i :n ja y_j :n erillisiin listoihin eikä niitä enää voida verrata
- ★ Joukossa Y^{ij} on $j - i + 1$ alkioita, joista kahden valinta johtaa alkioiden vertailuun
- ★ Jakoalkio vedetään tasaisella jakaumalla, joten

$$\mathbf{E}[X_{ij}] = \Pr(X_{ij} = 1) = \frac{2}{j - i + 1}$$

64

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X] &= \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \frac{2}{j-i+1} \\
&\stackrel{k=j-i+1}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=2}^{n-i+1} \frac{2}{k} \\
&= \sum_{k=2}^n \sum_{i=1}^{n+1-k} \frac{2}{k} \\
&= \sum_{k=2}^n (n+1-k) \frac{2}{k} \\
&= \left((n+1) \sum_{k=2}^n \frac{2}{k} \right) - 2(n-1) \\
&= (2n+2) \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - 4n \\
&= (2n+2)H(n) - 4n \\
&= 2n \ln n + \Theta(n)
\end{aligned}$$

65

- ★ Deterministiselläkin jakoalkion valinnalla (esim. tarkasteltavan listan ensimmäinen alkio) pikajärjestämisen odotusarvoisesti vaatimien vertailujen lkm on $2n \ln n + O(n)$
- ★ Tällä kertaa satunnaistetaan syötellistän S alkioiden järjestys tasaisesti
- ★ Analyysi on jokseenkin sama kuin satunnaisen pikajärjestämisen
- ★ Alkioita y_i ja y_j verrataan algoritmissa vain jos toinen valitaan 1. jakoalkioksi joukosta Y^{ij}
- ★ Satunnaisessa järjestyksessä olevassa listassa kullakin alkiolla on sama tn. olla ensimmäisenä

66