3. Momentit ja poikkeamat

- Aloitamme *häntäjakauman* (tail distribution) rajoittamiskeinojen tarkastelun
- Häntäjakaumalla mitataan (epä-) todennäköisyyttä, että s-muuttuja saa kaukana odotusarvostaan olevia arvoja
- Näin voidaan todeta satunnaisalgoritmin toimivan oikein "suurella todennäköisyydellä"
- *Markovin epäyhtälö* on heikko, mutta paras mahdollinen raja, joka voidaan saavuttaa, kun tiedetään vain, että s-muuttuja
  - saa ei-negatiivisia arvoja ja
  - sen odotusarvolla on tietty arvo

Markovin epäyhtälö

Lause 3.1: *Olk. X vain ei-negatiivisia arvoja saava satunnaismuuttuja. Kaikilla $a \in \mathbb{R}^+$*

$$\Pr(X \geq a) \leq \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

Todistus. Olk. arvolla $a > 0$ indikaattori I s.e.

$$I = \begin{cases} 1, & \text{kun } X \geq a \\ 0, & \text{muuten.} \end{cases}$$

Indikaattorin I odotusarvo on

$$\mathbf{E}[I] = \Pr(I = 1) = \Pr(X \geq a)\,.$$

Koska $X \geq 0$, niin $I \leq X/a$. Täten

$$\Pr(X \geq a) = \mathbf{E}[I] \leq \mathbf{E}\left[\frac{X}{a}\right] = \frac{\mathbf{E}[X]}{a}.$$

$\square$

- Häntäjakauman rajoituksena ilmaisten Markovin epäyhtälö on

$$\Pr(X \geq k\mathbf{E}[X]) \leq \frac{1}{k}$$

- Heitetään tasapainoista kolikkoa n kertaa
- Mikä on tn., että tulee ainakin $3n/4$ kruunaa?
- Olk. X kruunien lkm; $X \geq 0$ ja $\mathbf{E}[X] = n/2$
- Markovin epäyhtälöä soveltaen

$$\begin{aligned} \Pr\left(X \geq \frac{3n}{4}\right) &= \Pr\left(X \geq \frac{3}{2}\mathbf{E}[X]\right) \\ &\leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Momentit ja varianssi

- S-muuttujan X *k:s momentti* on $\mathbf{E}\left[X^k\right]$
- Jos odotusarvon lisäksi tunnetaan toinenkin momentti ($\mathbf{E}\left[X^2\right]$), voidaan laskea varianssi ja (keski)hajonta
- X:n *varianssi* on (vrt. kalvo 43)

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X] &= \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2\right] \\ &= \mathbf{E}\left[X^2\right] - (\mathbf{E}[X])^2 \end{aligned}$$

- X:n *(keski)hajonta* (standard deviation) $\sigma[X]$ on varianssin neliöjuuri: $\sigma[X] = \sqrt{\mathbf{Var}[x]}$
- Varianssi ja hajonta kuvaavat jakauman keskittymistä odotusarvon läheisyyteen

- ⋆ Kahden s-muuttujan X ja Y *kovarianssi* on

$$\mathbf{Cov}(X,Y) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])]$$

Lause 3.2: *Mielivaltaisille s-muuttujille X ja Y pätee $\mathbf{Var}[X+Y] =$*

$$\mathbf{Var}[X] + \mathbf{Var}[Y] + 2\mathbf{Cov}(X,Y)\,.$$

Todistus.

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Var}[X+Y] \\
&\quad = \mathbf{E}\left[(X + Y - \mathbf{E}[X+Y])^2\right] \\
&\quad = \mathbf{E}\left[(X + Y - \mathbf{E}[X] - \mathbf{E}[Y])^2\right] \\
&\quad = \mathbf{E}\left[(X - \mathbf{E}[X])^2 + (Y - \mathbf{E}[Y])^2\right. \\
&\qquad \left. + 2(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])\right] \\
&\quad = \mathbf{Var}[X] + \mathbf{Var}[Y] + 2\mathbf{Cov}(X,Y)\,.
\end{aligned}$$

□

Lause 3.3: *Riippumattomille s-muuttujille X ja Y pätee $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[X]\,\mathbf{E}[Y]$.*

- ⋆ Toisin kuin odotusarvon lineaarisuus, joka pätee myös toisistaan riippuville s-muuttujille, lause 3.3 edellyttää riippumattomuutta
- ⋆ Jos esim. Y ja Z saavat arvonsa riippumattomien kolikon heittojen tuloksena s.e. arvo on 1 kun tulee kruuna ja 0 muuten, niin $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z] = 1/2$ ja $\Pr(YZ = 1) = 1/4$
- ⋆ Siis $\mathbf{E}[YZ] = \mathbf{E}[Y]\,\mathbf{E}[Z]$
- ⋆ Toisiinsa kytkettyjen kolikkojen heitossa molemmilla saadaan joko kruuna tai klaava
- ⋆ Edelleen $\mathbf{E}[Y] = \mathbf{E}[Z] = 1/2$, mutta nyt $\Pr(YZ = 1) = 1/2$, joten $\mathbf{E}[YZ] \neq \mathbf{E}[Y]\,\mathbf{E}[Z]$

Korollaari 3.4: *Riippumattomille s-muuttujille X ja Y pätevät $\mathbf{Cov}(X,Y) = 0$ ja*

$$\mathbf{Var}[X+Y] = \mathbf{Var}[X] + \mathbf{Var}[Y]\,.$$

Todistus. Koska X ja Y ovat riippumattomia, niin myös $X - \mathbf{E}[X]$ ja $Y - \mathbf{E}[Y]$ ovat. Täten

$$\begin{aligned}
\mathbf{Cov}(X,Y) &= \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])(Y - \mathbf{E}[Y])] \\
&= \mathbf{E}[X - \mathbf{E}[X]]\,\mathbf{E}[Y - \mathbf{E}[Y]]\,.
\end{aligned}$$

Lineaarisuuden perusteella $\mathbf{E}[Z - \mathbf{E}[Z]] = \mathbf{E}[Z] - \mathbf{E}[\mathbf{E}[Z]] = 0$, joten ensimmäinen väite seuraa. Jälkimmäinen väite seuraa nyt lauseen 3.2 perusteella. □

Lause 3.5: *Olk. $X_1, \ldots, X_n$ toisistaan riippumattomia s-muuttujia. Tällöin*

$$\mathbf{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}[X_i]\,.$$

- ⋆ Olk. indikaattori $X_i \sim \mathrm{Bernoulli}(p)$, joten $\mathbf{E}[X_i] = p$

$$\begin{aligned}
\mathbf{Var}[X_i] &= \mathbf{E}\left[(X_i - \mathbf{E}[X_i])^2\right] \\
&= \sum_{j=0}^{1} \Pr(X_i = j)\,(j - \mathbf{E}[X_i])^2 \\
&= p(1-p)^2 + (1-p)(-p)^2 \\
&= p - p^2 \\
&= p(1-p)
\end{aligned}$$

- ⋆ Olk. nyt X riippumattomien tällaisten indikaattorien summa
- ⋆ Ts. $X \sim B(n,p)$
- ⋆ Korollaarin 3.4 (yleistyksen) perusteella

$$\mathbf{Var}[X] = np(1-p)$$

Tšebyševin epäyhtälö

Lause 3.6: *Kaikilla* $a > 0$

$$\Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) \leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}.$$

Todistus. Huomataan ensin, että

$$\Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq a) = \Pr\big((X - \mathbf{E}[X])^2 \geq a^2\big).$$

Koska s-muuttuja $(X - \mathbf{E}[X])^2$ on ei-negatiivinen, voimme soveltaa siihen Markovin epäyhtälöä:

$$\Pr\big((X - \mathbf{E}[X])^2 \geq a^2\big) \leq \frac{\mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}[X])^2\big]}{a^2} = \frac{\mathbf{Var}[X]}{a^2}.$$

□

Korollaari 3.7: *Kaikilla* $t > 1$

$$\begin{aligned} \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq t\sigma[X]) &\leq \frac{1}{t^2} \text{ ja} \\ \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq t\mathbf{E}[X]) &\leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{t^2(\mathbf{E}[X])^2}. \end{aligned}$$

- ⋆ Tšebyševin (Chebyshev) epäyhtälö on parempi raja häntätodennäköisyydelle kuin Markovin epäyhtälö, mutta vaatii varianssin tuntemista
- ⋆ Markovin epäyhtälön perusteella tn., että n:ssä kolikonheitossa saadaan $3n/4$ kruunaa on kork. $2/3$
- ⋆ Yhden heiton kruunaindikaattorille X_i pätee $\mathbf{E}\left[X_i^2\right] = \mathbf{E}[X_i] = 1/2$
- ⋆ Täten

$$\mathbf{Var}[X_i] = \mathbf{E}\left[X_i^2\right] - (\mathbf{E}[X_i])^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

- ⋆ Kruunien kokonaismäärä $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ on riippumattomien s-muuttujien summa, joten lauseen 3.5 perusteella $\mathbf{Var}[X] = n/4$
- ⋆ Tšebyševin epäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \Pr(X \geq 3n/4) &\leq \Pr(|X - \mathbf{E}[X]| \geq n/4) \\ &\leq \frac{\mathbf{Var}[X]}{(n/4)^2} \\ &= \frac{n/4}{(n/4)^2} \\ &= 4/n \end{aligned}$$

- ⋆ Rajaa voidaan vielä tiukentaa, sillä Tšebyševin epäyhtälöllä yllä arvioidaan tn:iä $X \leq n/4$ ja $X \geq 3n/4$
- ⋆ Symmetrian perusteella $\Pr(X \geq 3n/4) \leq 2/n$

KUPONGINKERÄÄJÄN ONGELMA (JATKOA)

- ⋆ Aiemmin totesimme, että kaikkien n:n erilaisen kupongin saamiseksi tarvittavien pakettien lkm:n X odotusarvo on $nH(n)$
- ⋆ Markovin epäyhtälön perusteella siis

$$\Pr(X \geq 2nH(n)) \leq \frac{1}{2}$$

- ⋆ Tšebyševin epäyhtälön soveltamiseksi meidän tulee selvittää $\mathbf{Var}[X]$
- ⋆ Muistetaan, että $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, missä $X_i \sim \mathrm{Geom}(p_i)$ ja $p_i = (n - i + 1)/n$
- ⋆ S-muuttujat X_i ovat riippumattomia, joten lauseen 3.5 perusteella

$$\mathbf{Var}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{Var}[X_i]$$

Lemma 3.8: *Olk.* $Y \sim Geom(p)$*. Tällöin* $\mathbf{Var}[Y] = (1-p)/p^2$.

- Seuraavassa käytetään ekvivalenssia

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

- Arvioimalla $\mathbf{Var}[X_i] \leq 1/p_i^2$ saadaan

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[X] &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{n}{n-i+1} \right)^2 \\ &= n^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} \right)^2 \leq \frac{\pi^2 n^2}{6} \end{aligned}$$

- Korollaarin 3.7 perusteella

$$\Pr(|X - nH(n)| \geq nH(n)) \leq \frac{n^2\pi^2/6}{(nH(n))^2} = \frac{\pi^2}{6(H(n))^2} = O\left(\frac{1}{\ln^2 n} \right)$$

- Taas Tšebyševin epäyhtälö antaa Markovin epäyhtälöä oleellisesti paremman rajan
- Tulos ei kuitenkaan ole tiukka
- Tn., että $n(\ln n + c)$:n kierroksen jälkeen ei ole saatu kuponkia i on

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n(\ln n + c)} \leq e^{-(\ln n + c)} = \frac{1}{e^c n}$$

- Yhdisteen tn.:n perusteella tn., että jotain kuponkia ei ole saatu $n(\ln n + c)$:n askelen jälkeen on e^{-c}
- Sijoittamalla $c = \ln n$ saamme

$$\Pr(X \geq 2n \ln n) \leq 1/n$$

- Suoraviivainen yhdisteen todennäköisyyden soveltaminen antaa siis vielä oleellisesti Tšebyševin epäyhtälöä tiukemman rajan

MEDIAANIALGORITMI

- Joukon S, jossa on n alkiota, *mediaani* m on alkio s.e.
  - väh. $\lfloor n/2 \rfloor$ alkiota on arvoltaan korkeintaan yhtä suuria kuin m ja
  - väh. $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ alkiota on arvoltaan vähintään yhtä suuria kuin m
- Yksinkert. vuoksi oletamme alkioiden olevan erillisiä ja niitä olevan pariton lkm
- Tällöin m on $\lceil n/2 \rceil$:s alkio $\Rightarrow$ $O(n \log n)$ det. algoritmi järjestäm. S
- On olemassa myös monimutkainen deterministinen $O(n)$ algoritmi
- Satunnaistetulla algoritmilla saavutetaan kuitenkin yksinkertaisuus ja paremmat vakiokertoimet

- *Satunnaisotannalla* (sampling) tavoittelemme alarajaa d ja ylärajaa u s.e.
  1. $d \leq m \leq u$ ja
  2. Joukolle $C = \{ s \in S \mid d \leq s \leq u \}$ pätee $|C| = o(n/\log n)$
- Jos sopivat d ja u löydetään, niin
  1. d:tä pienempien alkioiden lkm ℓ_d voidaan laskea $O(n)$ ajassa,
  2. Joukon C alkiot voidaan järjestää alilineaarisessa $o(n)$ ajassa normaalilla $O(n \log n)$ ajan vaativalla algoritmilla ja
  3. $(\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1)$:s alkio joukossa C on mediaani m, sillä joukossa $S \setminus C$ on ℓ_d ja C:ssä $\lfloor n/2 - \ell_d \rfloor$ m:ää pienempää alkiota
- Selvästi yo. algoritmi on lineaariaikainen kunhan rajat d ja u voidaan valita $O(n)$ ajassa

- ⋆ Alkioiden d ja u löytämiseksi vedetään S:stä takaisinpanolla $\lceil n^{3/4} \rceil$:n alkion monijoukko R
- ⋆ Satunnaisotoksen R mediaanin pitäisi olla lähellä S:n mediaania m
- ⋆ Valitaan siis R:n mediaanin ympäriltä

$$\begin{aligned} d &\leftarrow R\text{:n } \left\lfloor n^{3/4}/2 - \sqrt{n} \right\rfloor\text{:s alkio} \\ u &\leftarrow R\text{:n } \left\lceil n^{3/4}/2 + \sqrt{n} \right\rceil\text{:s alkio} \end{aligned}$$

- ⋆ Tällä tavoin C tulee sisältämään R:n mediaania ympäröivien $2\sqrt{n}$ otospisteen väliin jäävät S:n pisteet
- ⋆ Tällä valinnalla voimme taata, että C sisältää mediaanin m suurella todennäköisyydellä $1 - O(1/n^c)$, missä vakio $c > 0$

Syöte: Täysin järjestetyn avaruuden joukko S, jossa on n alkiota.

Tulos: S:n mediaanialkio m.

1. Vedä $\lceil n^{3/4} \rceil$:n alkion monijoukko R S:stä riippumattomasti ja tasaisesti takaisinpanolla ja järjestä R.
2. $d \leftarrow R$:n $\lfloor n^{3/4}/2 - \sqrt{n} \rfloor$:s alkio
   $u \leftarrow R$:n $\lceil n^{3/4}/2 + \sqrt{n} \rceil$:s alkio.
3. Vertaamalla kaikkia S:n alkioita d:hen ja u:hun laske:
   (a) $C = \{ x \in S \mid d \leq x \leq u \}$ ja luvut
   (b) $\ell_d = |\{ x \in S \mid x < d \}|$ sekä
   (c) $\ell_u = |\{ x \in S \mid x > u \}|$.
4. Jos ℓ_d tai $\ell_u > n/2$, niin **epäonnistu**.
5. Jos $|C| \leq 4n^{3/4}$ niin järjestä C, muuten **epäonnistu**.
6. **Palauta** C:n $(\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1)$:s alkio.

Algoritmin analyysi

Lause 3.9: *Satunnaistettu mediaanialgoritmi toimii syötteen pituuden suhteen lineaarisessa ajassa ja jollei sen toiminta epäonnistu, niin se palauttaa oikean vastauksen.*

Todistus. Ainoa tilanne, jossa algoritmi voisi antaa väärän vastauksen on se, että mediaanialkio ei kuulu joukkoon C. Tällöin $\ell_d > n/2$ tai $\ell_u > n/2$ ja algoritmin toiminta epäonnistuu askelessa 4.

Algoritmin kaikki askelet ovat syötteen S suhteen lineaariaikaisia kunhan joukko C on riittävän pieni. Askelessa 5 varmistetaan, että C on riittävän pieni ennen sen järjestämistä. Jos C:n koko vaarantaisi lineaariaikaisen suorituksen, algoritmin toiminta epäonnistuu. □

- ⋆ Millä todennäköisyydellä algoritmin toiminta epäonnistuu?
- ⋆ On kolme mahdollisuutta
- ⋆ $\ell_d > n/2$: Tällöin R:n $\lfloor n^{3/4}/2 - \sqrt{n} \rfloor$:s alkio on suurempi kuin m
- ⋆ Olk. tämä tapahtuma $\mathcal{E}_1$:

$$Y_1 = |\{ r \in R \mid r \leq m \}| < \frac{n^{3/4}}{2} - \sqrt{n}$$

- ⋆ Samoin tilannetta $\ell_u > n/2$ vastaten $\mathcal{E}_2$:

$$Y_2 = |\{ r \in R \mid r \geq m \}| < \frac{n^{3/4}}{2} - \sqrt{n}$$

- ⋆ Viimeinen epäonnistumiseen johtava tapahtuma on $\mathcal{E}_3$: $|C| > 4n^{3/4}$
- ⋆ Näiden kolmen tapahtuman yhteenlaskettu tn. on kork. $O(n^{-1/4})$

Lemma 3.11: $\Pr(\mathcal{E}_1) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}$.

Todistus. Määr. indikaattorit X_i s.e.

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{jos } r_i \leq m \\ 0 & \text{muuten,} \end{cases}$$

missä r_i on i:s otospiste. Koska satunnaisotanta on takaisinpanolla, niin X_i:t ovat toisistaan riippumattomia. Määritelmän mukaan $(n-1)/2+1$ joukon S pisteistä on arvoltaan kork. m, joten

$$\Pr(X_i = 1) = \frac{(n-1)/2+1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}.$$

Tapahtuma $\mathcal{E}_1$ on sama kuin

$$Y_1 = \sum_{i=1}^{n^{3/4}} X_i < \frac{n^{3/4}}{2} - \sqrt{n}.$$

Bernoulli-kokeiden summana $Y_1 \sim B(n^{3/4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2n})$.

Täten sen varianssi on $np(1-p)$ (vrt. kalvo 74):

$$\begin{aligned} \mathbf{Var}[Y_1] &= n^{3/4}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{4}n^{3/4} - \frac{1}{4n^{5/4}} < \frac{1}{4}n^{3/4}. \end{aligned}$$

Tšebyševin epäyhtälön perusteella

$$\begin{aligned} \Pr(\mathcal{E}_1) &= \Pr\left(Y_1 < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}\right) \\ &\leq \Pr\left(|Y_1 - \mathbf{E}[Y_1]| > \sqrt{n}\right) \\ &\leq \frac{\mathbf{Var}[Y_1]}{n} \\ &< \frac{n^{3/4}/4}{n} = \frac{1}{4}n^{-1/4}. \end{aligned}$$

□

- ⋆ Samoin rajataan tapahtuman $\mathcal{E}_2$ tn.
- ⋆ Myös tapahtuman $\mathcal{E}_3$ tn. voidaan rajata Tšebyševin epäyhtälöllä

Lemma 3.12: $\Pr(\mathcal{E}_3) \leq \frac{1}{2}n^{-1/4}$.

- ⋆ Kaikkiaan mediaanialgoritmin epäonnistumistn. on siis $\Pr(\mathcal{E}_1) + \Pr(\mathcal{E}_2) + \Pr(\mathcal{E}_3) \leq n^{-1/4}$
- ⋆ Tämä on ns. *Monte Carlo* -algoritmi, se voi epäonnistua tai palauttaa väärän vastauksen
- ⋆ Yleensä MC-algoritmin vaatima aika ei riipu satunnaisista valinnoista
- ⋆ Suorittamalla algoritmia toistuvasti kunnes mediaani löydetään, saadaan *Las Vegas* -algoritmi, joka aina palauttaa oikean vastauksen
- ⋆ LV-algoritmin suoritusaika tyypillisesti vaihtelee
- ⋆ Mediaanialgoritmin aikavaativuuden odotusarvo LV-varianttina on edelleen lineaarinen

4. Chernoffin rajat

- ⋆ Herman Chernoff 1923–
USAlainen matemaatikko
- ⋆ Chernoffin rajat on yleisnimitys vahvoille, eksponentiaalisesti pieneneville häntätn.:n rajoituksille
- ⋆ Esim. kun $X \sim B(n,p)$ ja $\mu = \mathbf{E}[X]$, niin mille tahansa $0 < \delta \leq 1$ pätee

$$\Pr(X \geq (1+\delta)\mu) \leq e^{-\mu\delta^2/3}$$

- ⋆ Seuraus: $X \leq \mu + \sqrt{3\mu \ln 2}$ tn.:llä $1/2$
- ⋆ Chernoffin rajojen johtamiseksi sovelletaan Markovin epäyhtälöä *momenttigeneroivaan funktioon* (mgf)

Momenttigeneroiva funktio

- ⋆ S-muuttujan X momenttigeneroiva funktio on $M_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{tX}\right]$ (jos odotusarvo on äärellinen)
- ⋆ Mgf sisältää tiedon kaikista X:n momenteista

Lause 4.1: *Jos $M_X(t)$ on määritelty jossain origon ympäristössä $t \in (-\delta, \delta)$, niin $M_X(t)$:n n:s derivaatta origossa on X:n n:s momentti $M_X^{(n)}(0) = \mathbf{E}[X^n]$.*

Todistus. Kun mgf

$$M_X(t) = \mathbf{E}\left[e^{tX}\right] = \sum_x \Pr(X = x)\, e^{tx}$$

on määritelty origon ympäristössä, se voidaan derivoida termeittäin. Täten

$$M_X^{(n)}(t) = \sum_x \Pr(X = x)\, x^n e^{tx} = \mathbf{E}\left[X^n e^{tX}\right].$$

Sijoittamalla $t = 0$ saadaan väite. □

- ⋆ Olk. $X \sim \mathrm{Geom}(p)$
- ⋆ Arvoilla $t < -\ln(1-p)$ pätee

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathbf{E}\left[e^{tX}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} p e^{tk} \\ &= \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^k e^{tk} \\ &= \frac{p}{1-p}\left(\frac{1}{1-(1-p)e^t} - 1\right) \end{aligned}$$

- ⋆ Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned} M'_X(t) &= \frac{pe^t}{(1-(1-p)e^t)^2} \\ M''_X(t) &= \frac{2p(1-p)e^{2t}}{(1-(1-p)e^t)^3} + M'_X(t) \end{aligned}$$

- ⋆ Sijoittamalla $t = 0$ saadaan tulokset $\mathbf{E}[X] = 1/p$ (vrt. kalvo 56) ja $\mathbf{E}\left[X^2\right] = (2-p)/p^2$ (vrt. kalvo 79)

- ⋆ Mgf (eli kaikki momentit) määrittää s-muuttujan jakauman 1-käsitteisesti

Lause 4.2: *Olk. X ja Y kaksi s-muuttujaa. Jos $M_X(t) = M_Y(t)$ kaikilla $t \in (-\delta, \delta)$ jollain $\delta > 0$, niin X:llä ja Y:llä on sama jakauma.*

Lause 4.3: *Olk. X ja Y riippumattomia s-muuttujia. Tällöin*

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t) M_Y(t).$$

Todistus. Koska X ja Y ovat riippumattomia, niin myös e^{tX} ja e^{tY} ovat, joten

$$\begin{aligned} M_{X+Y}(t) &= \mathbf{E}\left[e^{t(X+Y)}\right] = \mathbf{E}\left[e^{tX} e^{tY}\right] \\ &= \mathbf{E}\left[e^{tX}\right] \mathbf{E}\left[e^{tY}\right] \\ &= M_X(t) M_Y(t). \end{aligned}$$

□