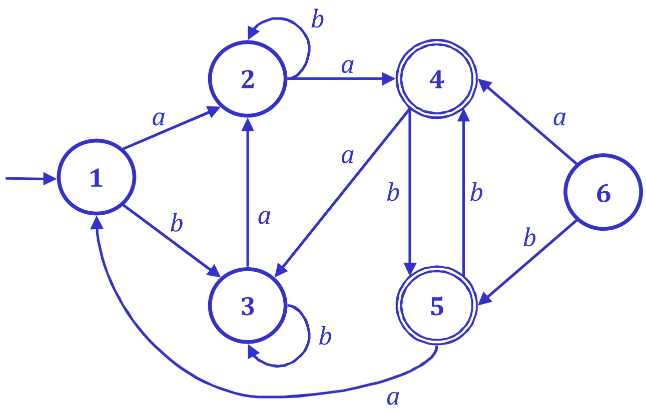
2.2 Automaattien minimointi

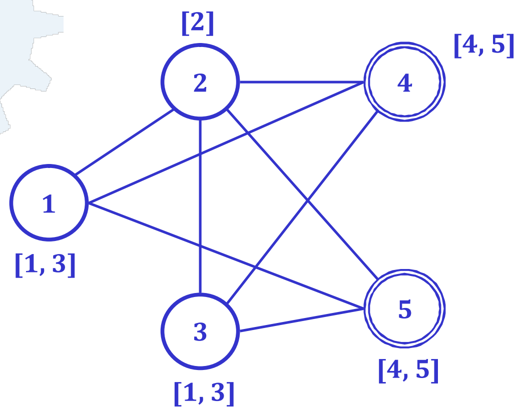
- Kaksi automaattia, jotka tunnistavat täsmälleen saman kielen ovat keskenään *ekvivalentteja*
- Äärellinen automaatti on *minimaalinen* jos se on tilamäärältään pienin ekvivalenttien automaattien joukossa
- Automaatti, jossa on enemmän tiloja kuin ekvivalentissa minimaalisessa automaatissa on *redundantti*
- Automaatteja muodostavat algoritmit eivät aina tuota minimaalista automaattia
- Minimaalisen automaatin käsittely on tehokkaampaa kuin redundantin

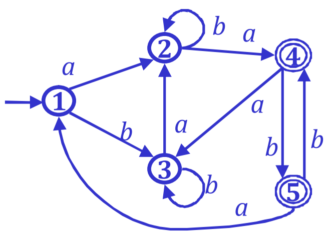
Algoritmi minimoi

Syöte: äärellinen automaatti $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$.

1. Poista M:n turhat tilat — ne joihin ei voida päästä alkutilasta.
2. Muodosta suuntaamaton verkko G, jonka solmuja ovat M:n tilat.
3. Lisää G:hen kaari kustakin ei-lopputilasta kuhunkin lopputilaan.
4. Toista niin kauan kuin G:hen tulee uusia kaaria:
   1. Jokaiselle parille $q, r \in Q$, $q \neq r$, ja jokaiselle $a \in \Sigma$: lisää kaari (q, r) verkkoon G, jos $(\delta(q, a), \delta(r, a))$ on kaari G:ssä.
   2. Kullakin tilalla $q \in Q$ olkoon
   - $[q] = \{ q \} \cup \{ r \in Q \mid$ *q:n ja r:n välillä ei ole kaarta G:ssä* $\}$.
5. Muodosta äärellinen automaatti $M' = (Q', \Sigma, \delta', q'_0, F')$, missä
   - $Q' = \{ [q] \mid q \in Q \}$, (tuplat poistaen)
   - $\delta'([q], a) = [\delta(q, a)]$, kaikilla $q \in Q$ ja $a \in \Sigma$,
   - $q'_0 = [q_0]$ ja
   - $F' = \{ [q] \mid q \in F \}$.
6. Palauta M'.

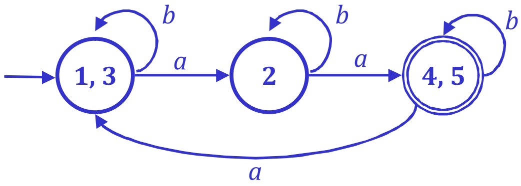



[2]
[4, 5]
[1, 3]
[1, 3]
[4, 5]



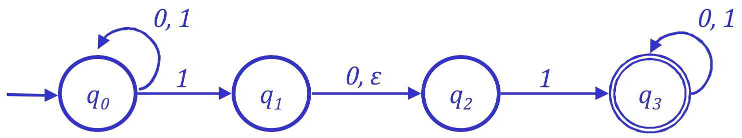
Lopputulos

- Syöteautomaatin M kanssa ekvivalentti äärellinen automaatti M' , jossa on minimimäärä tiloja
- Automaatti M' on tilojen nimeämistä vaille yksikäsitteinen.



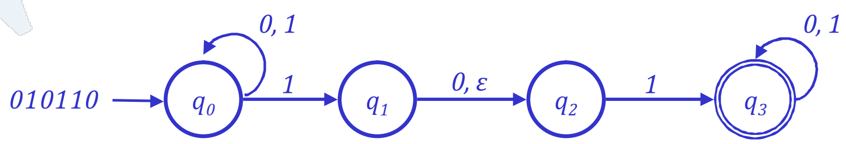
2.3 Epädeterministiset äärelliset automaatit

- Epädeterministisessä automaatissa sallitaan tilasta olevan monta vaihtoehtoista siirtymää samalla syöteaakkoston merkillä
- Lisäksi sallitaan ε-siirtymät
- Epädeterminismin toteuttaminen ei ole suoraviivaista (joskin se on mahdollista), mutta kuvauksen apuna se on kätevää
- Epädeterminististen automaattien avulla luodaan yhteys determinististen äärellisten automaattien ja *säännöllisten lausekkeiden* välille



- Automaatin määritelmä vaatii siirtymäfunktion δ olevan *funktio*
- Epädeterministisellä automaatilla siirtymäfunktion on kuvauduttava *joukolle* mahdollisia arvoja
- Epädeterministinen automaatti hyväksyy merkkijonon jos jokin mahdollisten tilojen jono johtaa lopputilaan.
  - Vain jos yhtään tällaista jonoa ei ole, niin automaatti hylkää syötemerkkijonon
- Esim. ed. automaatti hyväksyy syötejonon 010110, koska se voidaan käsitellä mm. seuraavasti

$(q_0, 010110) \supset (q_0, 10110) \supset (q_1, 0110)$
$(q_2, 110) \supset (q_3, 10) \supset (q_3, 0) \supset (q_3, \varepsilon)$



- Toisaalta voidaan myös päätyä hylkäävään tilaan:

$(q_0, 010110)$ ➲ $(q_0, 10110)$ ➲ $(q_0, 0110)$
➲ $(q_0, 110)$ ➲ $(q_0, 10)$ ➲ $(q_1, 0)$ ➲ (q_2, ε)

- Merk. $\mathcal{P}(A) = \{ B \mid B \subseteq A \}$ on joukon A *potenssijoukko* ja aakkostolle Σ: $\Sigma_\varepsilon = \Sigma \cup \{ \varepsilon \}$

- Epädeterministinen äärellinen automaatti on viisikko $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$
  - Q on äärellinen *tilojen* joukko,
  - Σ on *syöteaakkosto*,
  - $\delta: Q \times \Sigma_\varepsilon \rightarrow \mathcal{P}(Q)$ on (joukkoarvoinen) *siirtymäfunktio*, jossa myös ε-siirtymät ovat sallittuja
  - $q_0 \in Q$ on *alkutila* ja
  - $F \subseteq Q$ *lopputilojen* joukko

- Edellisen automaatin siirtymäfunktio on

	0	1	ε
$\rightarrow q_0$	$\{q_0\}$	$\{q_0 q_1\}$	$\emptyset$
q_1	$\{q_2\}$	$\emptyset$	$\{q_2\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_3\}$	$\emptyset$
$\leftarrow q_3$	$\{q_3\}$	$\{q_3\}$	$\emptyset$

- Nyt virhetilanne on helposti ilmaistavissa tyhjän seuraaja-tilajoukon avulla

- Epädeterministinen äärellinen automaatti $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *hyväksyy* merkkijonon w,
  - jos se voidaan kirjoittaa muotoon $w = y_1 y_2 ... y_n \in \Sigma_\varepsilon^m$ ja jos Q:ssa on tilojen jono $r_0, r_1, ..., r_m$ s.e.
    - $r_0 = q_0$,
    - $r_{i+1} \in \delta(r_i, y_{i+1}), i = 0, ..., m-1,$
    - $r_m \in F.$
- Deterministiset automaatit ovat epädeterminististen erikoistapaus → kaikki edellisillä tunnistettavat kielet ovat tunnistettavissa myös jälkimmäisillä
- Mutta myös kääntäen: *deterministiset ja epädeterministiset äärelliset automaatit ovat yhtä vahvoja*

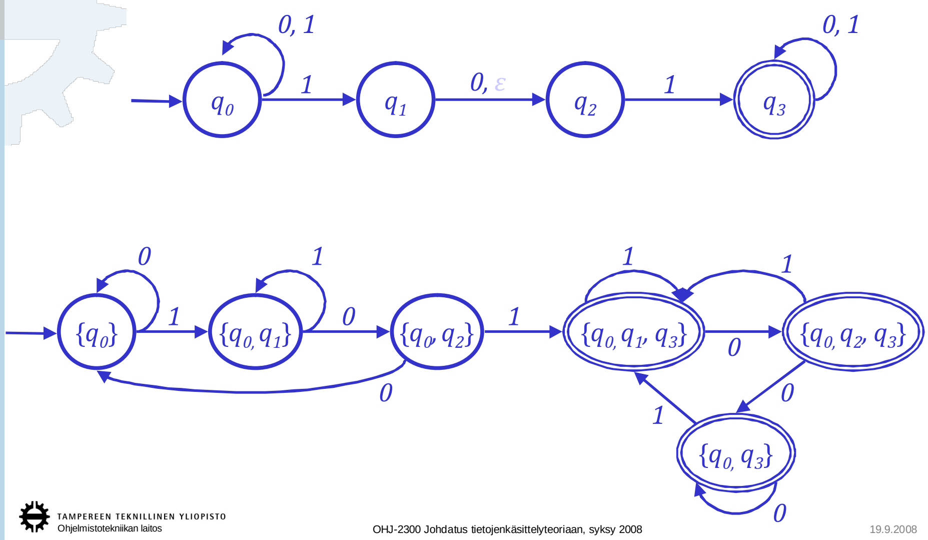
Lause 1.39 *Olk. $A = L(N)$ jonkin epädeterministisen äärellisen automaatin N tunnistama kieli. Tällöin on olemassa deterministinen automaatti M, jolla $L(M) = A$*

Todistus. Olk. $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Laaditaan deterministinen automaatti $M = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$, joka simuloi N:n toimintaa kaikissa sen kullakin hetkellä mahdollisissa tiloissa rinnakkain. Tarkastellaan ensin tilannetta ilman ε-siirtymiä

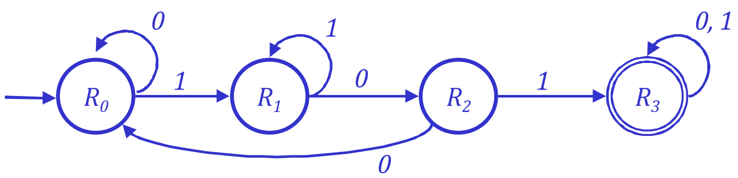
Automaatin M tilat vastaavat N:n tilojen joukkoja

$$Q' = \mathcal{P}(Q),\ q_0' = \{ q_0 \}$$
$$F' = \{ R \in Q' \mid R \text{ sisältää jonkin } r \in F \}$$
$$\delta'(R, a) = \cup_{r \in R} \delta(r, a)$$

Ilman epsilonia



Minimoituna



Tarkastetaan, että $L(M) = L(N)$. Kielten ekvivalenssi seuraa, kun todistetaan kaikilla $x \in \Sigma^*$ ja $r \in Q$:

$$(q_0, x) \ggg_N (r, \varepsilon) \Leftrightarrow (\{q_0\}, x) \ggg_M (R, \varepsilon) \text{ ja } r \in R,$$

missä merkintä $(q_0, x) \ggg_N (r, \varepsilon)$ tarkoittaa, että automaatissa N voidaan merkkijono x käsitellä tilasta q_0 lähtien s.e. päädytään tilaan r ja käsiteltävänä ei enää ole merkkejä (ε).

Todistus induktiolla merkkijonon x pituuden suhteen:

1. $|x| = 0$: $(q_0, \varepsilon) \ggg_N (r, \varepsilon) \Leftrightarrow r = q_0$.
   Samoin $(\{q_0\}, \varepsilon) \ggg_M (R, \varepsilon) \Leftrightarrow R = \{q_0\}$

2. *Induktio-oletus*: väite pätee kun $|x| \le k$
3. $|x| = k+1$: tällöin $x = ya$ jollakin y, $|y| = k$, jolle väite pätee induktio-oletuksen perusteella. Nyt

$(q_0, x) = (q_0, ya) \ggg_N (r, \varepsilon)$

$\Leftrightarrow \quad \exists\, r' \in Q$ s.e. $(q_0, ya) \ggg_N (r', a)$ ja $(r', a) >_N (r, \varepsilon)$

$>$ = yhdellä siirtymällä

$\Leftrightarrow \quad \exists\, r' \in Q$ s.e. $(q_0, y) \ggg_N (r', \varepsilon)$ ja $(r', a) >_N (r, \varepsilon)$

induktio-oletuksen perusteella saadaan

$\Leftrightarrow \quad \exists\, r' \in Q$ s.e. $(\{q_0\}, y) \ggg_M (R', \varepsilon)$ ja $r' \in R'$ ja $r \in \delta(r', a)$

uudelleenjärjestäen

$\Leftrightarrow \quad (\{q_0\}, y) \ggg_M (R', \varepsilon)$ ja $\exists\, r' \in R'$ s.e. $r \in \delta(r', a)$

siirtymäfuntion δ' määritelmän perusteella

$\Leftrightarrow (\{q_0\}, y) \ggg_M (R', \varepsilon)$ ja $r \in \bigcup_{r' \in R'} \delta(r', a) = \delta'(R', a)$

palautetaan a ja nimetään $\delta'(R', a)$

$\Leftrightarrow (\{q_0\}, ya) \ggg_M (R', a)$ ja $r \in \delta'(R', a) = R$

$\Leftrightarrow (\{q_0\}, ya) \ggg_M (R', a)$ ja $(R', a) >_M (R, \varepsilon)$ ja $r \in R$

yhteenvetäen

$\Leftrightarrow (\{q_0\}, x) = (\{q_0\}, ya) \ggg_M (R, \varepsilon)$ ja $r \in R$

joka päättää väitteen todistuksen

- ε-siirtymien huomioimiseksi kullekin M:n tilalle $R \subseteq Q$ lasketaan niiden tilojen joukko, joihin voidaan päästä R:stä pelkin ε-siirtymin:

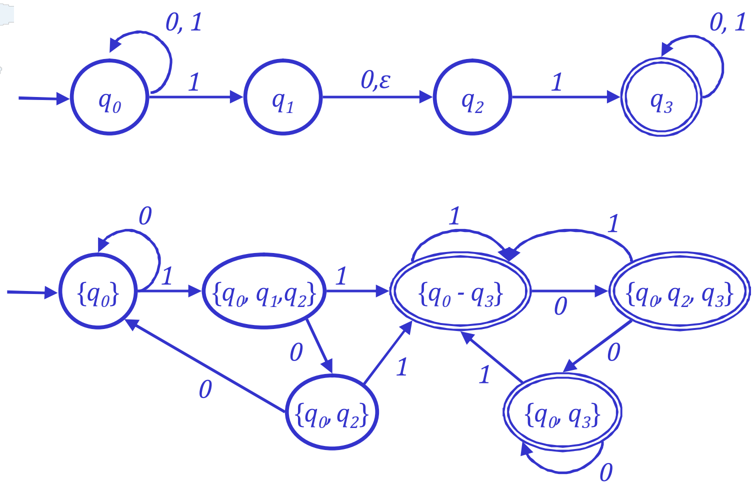
$$E(R) = \{\, q \mid q \text{ voidaan saavuttaa } R\text{:stä nollalla tai useammalla ε-siirtymällä} \,\}$$

- Riittää muuttaa M:n siirtymäfunktio ja alkutila huomioimaan mahdolliset ε-siirtymät

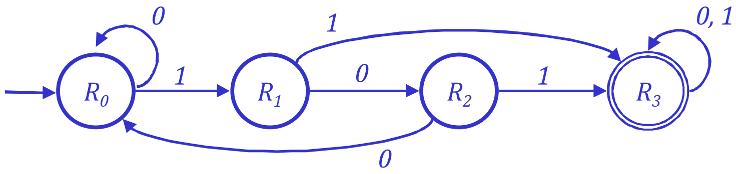
$$\delta'(R, a) = \cup_{r \in R} E(\delta(r, a))$$
$$q_0' = E(\{q_0\})$$

□

Epsilonin kera



Minimoituna



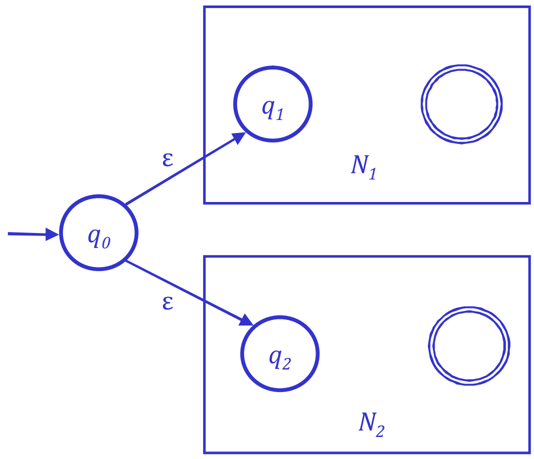
Lause 1.45 *Säännöllisten kielten luokka on suljettu yhdisteen suhteen.*

Todistus. Olk. kielet A_1 ja A_2 säännöllisiä. Tällöin on olemassa (epädeterministiset) äärelliset automaatit $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ja $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, jotka tunnistavat ko. kielet.

Laaditaan automaatti $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kielen $A_1 \cup A_2$ tunnistamiseksi.

- $Q = \{ q_0 \} \cup Q_1 \cup Q_2$,
- N:n alkutila on q_0,
- $F = F_1 \cup F_2$ ja

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a), & q \in Q_1 \\ \delta_2(q,a), & q \in Q_2 \\ \{q_1, q_2\}, & q = q_0 \text{ ja } a = \varepsilon \\ \emptyset, & q = q_0 \text{ ja } a \neq \varepsilon \end{cases}$$



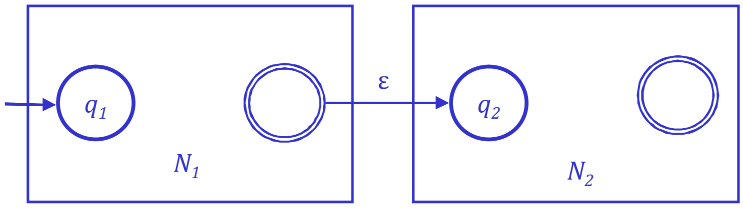
Lause 1.47 *Säännöllisten kielten luokka on suljettu katenaation suhteen.*

Todistus. Olk. kielet A_1 ja A_2 säännöllisiä. Tällöin on olemassa (epädeterministiset) äärelliset automaatit $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ ja $N_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$, jotka tunnistavat ko. kielet.
Laaditaan automaatti $N = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F_2)$ kielen $A_1 \circ A_2$ tunnistamiseksi.

- $Q = Q_1 \cup Q_2$,
- N:n alkutila on q_1,
- N:n lopputiloja ovat F_2 ja

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a), & q \in Q_1 \text{ ja } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a), & q \in F_1 \text{ ja } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_2\}, & q \in F_1 \text{ ja } a = \varepsilon \\ \delta_2(q,a), & q \in Q_2 \end{cases}$$

□



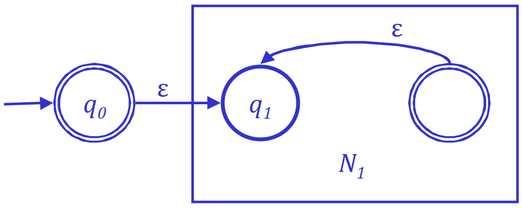
Lause 1.4. *Säännöllisten kielten luokka on suljettu sulkeuma-operaation suhteen*.

Todistus. Olk. kieli A säännöllinen. Tällöin on olemassa (epädeterministinen) äärellinen automaatti $N_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$, joka tunnistaa ko. kielen. Laaditaan automaatti $N = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ kielen A^* tunnistamiseksi.

- $Q = \{ q_0 \} \cup Q_1$,
- N:n uusi alkutila on q_0,
- $F = \{ q_0 \} \cup F_1$ ja

$$\delta(q,a) = \begin{cases} \delta_1(q,a), & q \in Q_1 \text{ ja } q \notin F_1 \\ \delta_1(q,a), & q \in F_1 \text{ ja } a \neq \varepsilon \\ \delta_1(q,a) \cup \{q_1\}, & q \in F_1 \text{ ja } a = \varepsilon \\ \{ q_1 \} & q = q_0 \text{ ja } a = \varepsilon \\ \emptyset, & q = q_0 \text{ ja } a \neq \varepsilon \end{cases}$$

□



2.4 Säännölliset lausekkeet

- Merkittävässä asemassa tekstiin kohdistuvien hakujen toteuttamisessa hahmojen kuvauskielenä (esim. awk, grep, Perl, ...)

Σ:n kaikki *säännölliset lausekkeet* ovat

1. Ø ja ε ovat säännöllisiä lausekkeita,
2. a on Σ:n säännöllinen lauseke kaikilla $a \in \Sigma$,
3. jos R_1 ja R_2 ovat säännöllisiä lausekkeita, niin silloin myös
   - $(R_1 \cup R_2)$,
   - $(R_1 \circ R_2)$ ja
   - $R_1{}^*$

   ovat säännöllisiä lausekkeita

Kukin Σ:n säännöllinen lauseke R kuvaa kielen $L(R)$

1. $L(\emptyset) = \emptyset$,
2. $L(\varepsilon) = \{\varepsilon\}$,
3. $L(a) = \{a\} \ \forall\, a \in \Sigma$,
4. $L((R_1 \cup R_2)) = L(R_1) \cup L(R_2)$,
5. $L((R_1 \circ R_2)) = L(R_1) \circ L(R_2)$ ja
6. $L(R_1^*) = (L(R_1))^*$

Aito sulkeuma: R^+ on lyhennysmerkintä RR^*:lle

Huom.: $R^+ \cup \varepsilon = R^*$

- Merkitään R^k, kun k kappaletta lauseketta R on katenoitu keskenään

Esimerkkejä

$0^*10^* = \{ w \mid w \textit{ sisältää vain yhden 1-merkin} \}$

$\Sigma^*001\Sigma^* = \{ w \mid w \textit{ sisältää alijonon } 001 \}$

$1^*(01^+)^* = \{ w \mid \textit{jokaista } w\textit{:n } 0\textit{:aa seuraa ainakin yksi } 1 \}$

$(\Sigma\Sigma)^* = \{ w \mid w \textit{ on pituudeltaan parillinen} \}$

$01 \cup 10 = \{ 01, 10 \}$

$0\Sigma^*0 \cup 1\Sigma^*1 \cup 0 \cup 1 = \{ w \mid w \textit{ alkaa ja loppuu samalla merkillä} \}$

$(0 \cup \varepsilon)1^* = 01^* \cup 1^*$

$(0 \cup \varepsilon)(1 \cup \varepsilon) = \{ \varepsilon, 0, 1, 01 \}$

$1^*\emptyset = \emptyset$

$\emptyset^* = \{ \varepsilon \}$

- Kaikilla säännöllisillä lausekkeilla R
  - $R \cup \emptyset = R$ ja
  - $R \circ \varepsilon = R$
- Sen sijaan voi olla
  - $R \cup \varepsilon \neq R$ ja
  - $R \circ \emptyset \neq R$

Esimerkiksi eo. automaatilla tunnistettavat etumerkittömät reaaliluvut voidaan kuvata säännöllisellä lausekkeella

$$d^+(\,.d^+ \cup \varepsilon\,)(\,\mathrm{E}\,(+ \cup - \cup \varepsilon\,)\,d^+ \cup \varepsilon\,),$$

missä $d = (\,0 \cup \ldots \cup 9\,)$

Lause 1.54 *Kieli on säännöllinen jos ja vain jos se voidaan kuvata säännöllisella lausekkeella*.

Todistetaan ekvivalenssin molemmat implikaatiot erikseen.

Lemma 1.55 *Säännöllisen lausekkeen kuvaama kieli on säännöllinen*.

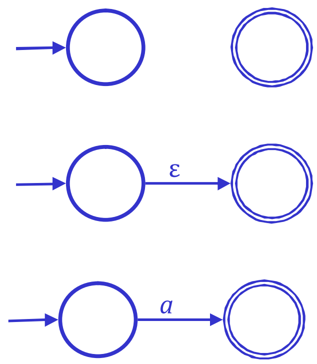
Todistus. Jokainen säännöllinen lauseke voidaan muuntaa äärelliseksi automaatiksi, jonka tunnistama kieli on sama kuin lausekkeen kuvaama.

On vain 6 sääntöä, joilla säännöllisiä lausekkeita voidaan muodostaa. Seuraavat kuvat antavat epädeterministisen automaatin kutakin sääntöä vastaten. □

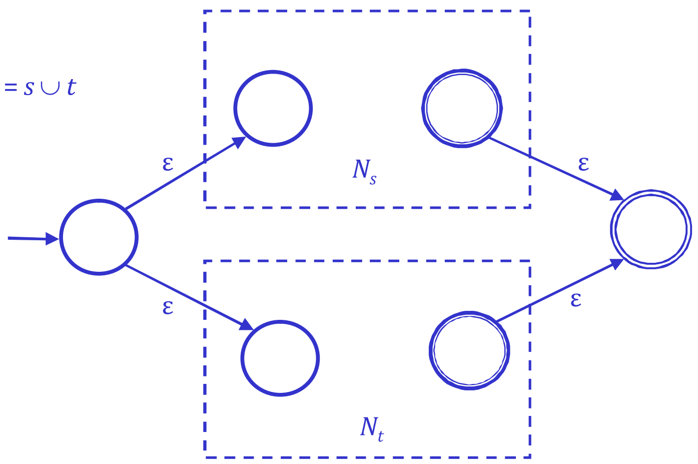
$r = \emptyset$

$r = \varepsilon$

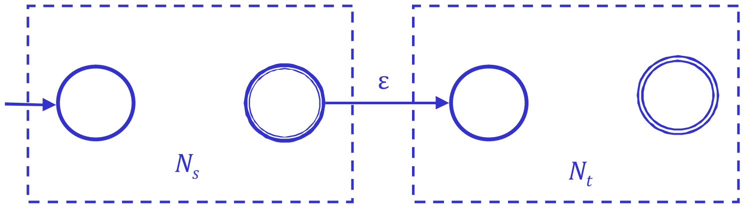
$r = a$



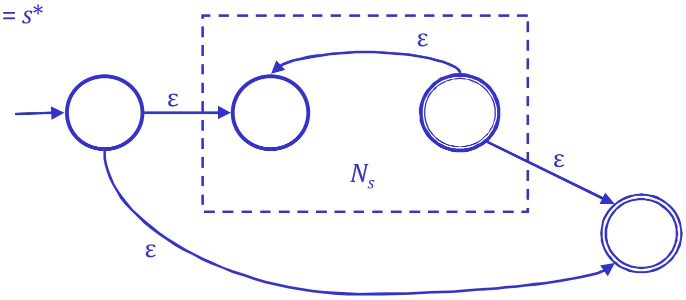
$r = s \cup t$

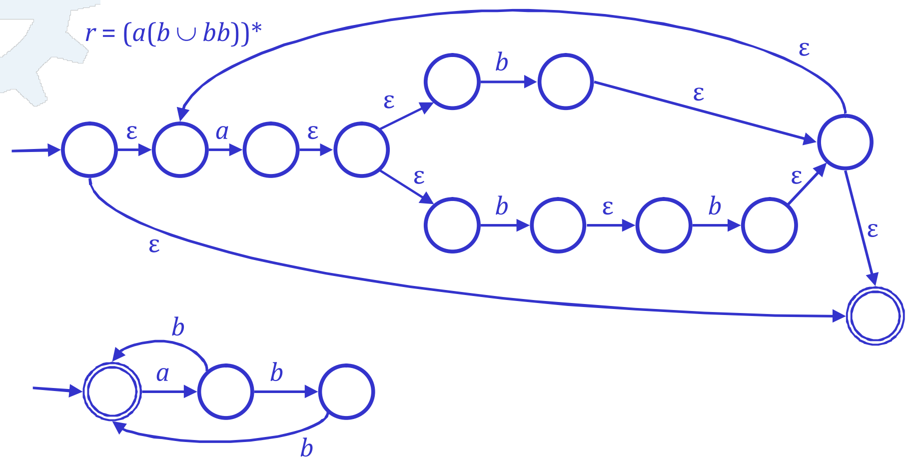


$r = st$



$r = s^*$





Lemma 1.60 *Jos kieli on säännöllinen, niin on olemassa sen kuvaava säännöllinen lauseke*.

Todistus. Määritelmän mukaan säännöllinen kieli on tunnistettavissa (epädeterministisellä) äärellisellä automaatilla, joka voidaan muuntaa lausekeautomaatiksi, joka puolestaan lopulta antaa alkuperäisen automaatin kanssa ekvivalentin säännöllisen lausekkeen.

- Merk. RE_Σ on Σ:n säännöllisten lausekkeiden joukko
- Lausekeautomaatissa siirtymäfunktio δ on *äärellinen kuvaus*

$$\delta: Q \times \mathrm{RE}_\Sigma \to \mathcal{P}(Q)$$

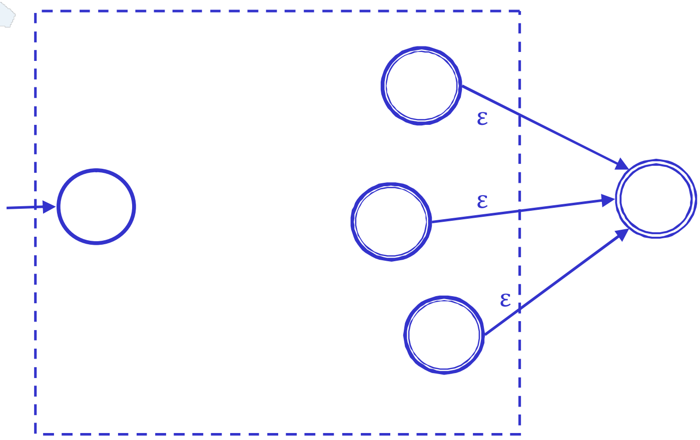
- $(q, w) \succ (q', w')$ jos $q' \in \delta(q, r)$ jollakin $r \in \mathrm{RE}_\Sigma$ s.e. $w = zw', z \in L(r)$

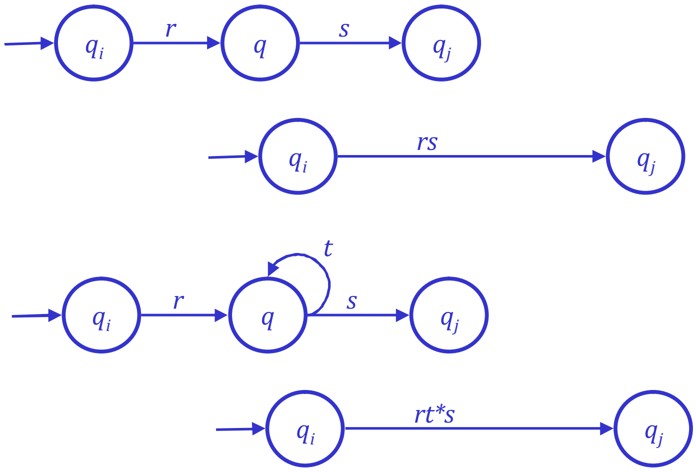
Lausekeautomaatti M voidaan redusoida säännölliseksi lausekkeeksi, joka kuvaa M:n tunnistaman kielen

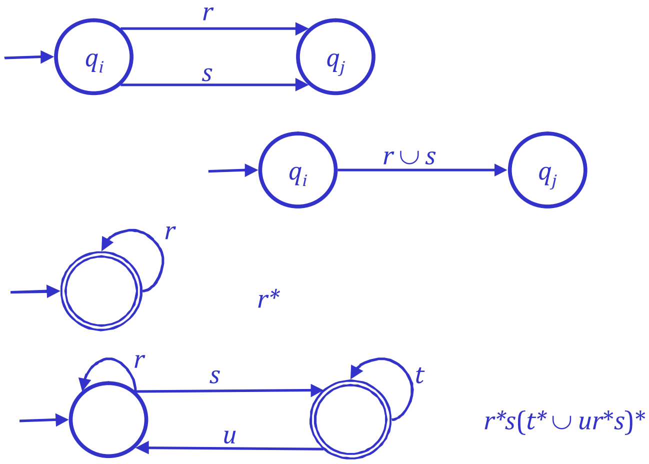
1. Tiivistetään M lausekeautomaatiksi, jossa on vain kaksi tilaa (tunnistettava kieli säilyy)
   1. M:n lopputilat korvataan yhdellä (ε-siirtymät)
   2. Poistetaan kaikki muut tilat q paitsi alku- ja lopputila.

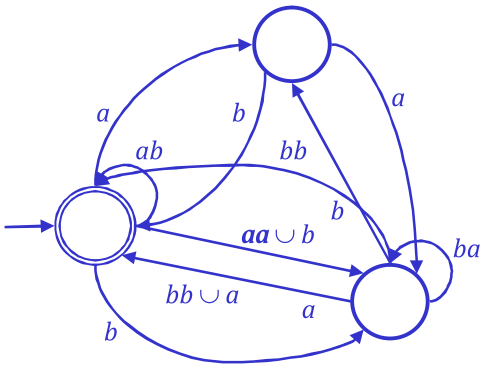
      Olkoon q_i ja q_j q:n edeltäjä- ja seuraajatila jollain q:n kautta kulkevalla reitillä.

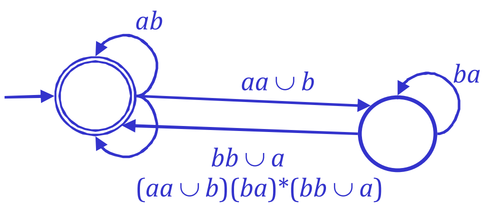
      Nyt q voidaan poistaa ja nimetä q_i:n ja q_j:n välinen kaari uudella lausekkeella.
2. Lopulta automaatissa on jäljellä korkeintaan kaksi tilaa. Automaatin tunnistama kieli on helppo muodostaa.




q_i r q s q_j
q_i rs q_j
q_i r q t s q_j
q_i rt*s q_j


q_i r s q_j
q_i $r \cup s$ q_j
r
r^*
r s t u
$r^*s(t^* \cup ur^*s)^*$





$$(ab \cup (aa \cup b)(ba)^*(bb \cup a))^*$$