Ohjelmistotekniikan matemaattiset menetelmät tentin 26.1.2004 kysymykset, vastaukset ja arvosteluperiaatteita

Antti Valmari
TTY / Ohj

19. helmikuuta 2004

Tässä tekstissä käyn läpi opintojakson 8100500 Ohjelmistotekniikan matemaattiset menetelmät 26.1.2004 pidetyn tentin vastaukset. Pyrin esittämään vastaukset ymmärrettävästi ja lisäksi perustelen joitakin vastauksia. Tämän vuoksi osa vastauksistani on pitempiä kuin annettu tila sallisi. Täysiin pisteisiin on yleensä riittänyt vaatimattomampi vastaus.

Arvosteluperiaatteet koskevat vain kyseistä tenttiä. Täysin moitteettomat vastaukset tuottavat tietysti aina täydet pisteet, mutta hieman virheellisten vastausten pisteytys voi vaihdella tenttikerrasta toiseen, samoin vastausten, jotka ovat selkeästi väärin mutta joissa on silti jotakin oikeansuuntaista.

Vajaita mutta nollaa suurempia pistemääriä jaoin vain niissä tapauksissa, joissa vastaus jakaantuu luonnostaan osiin jotka voi pisteyttää erikseen, tai joissa vastaus oli selvästi periaatteeltaan oikein mutta sisälsi olennaisen huolimattomuusvirheen. Tästä syystä vajaat nollaa suuremmat pistemäärät ovat melko harvinaisia.

Kirjoita lukukelpoista! Vastaukselta ei vaadita enempää kuin mihin tila riittää. Sivuja on kaksi.

Opiskelijanro __________ Nimi ____________________

Sähköposti __________________________

1 $\{\ n \geq 1 \wedge \forall i\,;\, 1 \leq i < n : A[i] \leq A[i+1]\ \}$
2 $a := 1;\ y := n$
3 **while** $a < y \wedge A[a] + A[y] \neq maali$ **do**
4 $\quad \{ \qquad (\forall i\,;\, 1 \leq i < a : \forall j\,;\, 1 \leq j \leq n : A[i] + A[j] \neq maali)$
5 $\quad\qquad \wedge \quad (\forall i\,;\, y < i \leq n : \forall j\,;\, 1 \leq j \leq n : A[i] + A[j] \neq maali)\ \}$
6 $\quad$ **if** $A[a] + A[y] < maali$ **then**
7 $\qquad a := a + 1$
8 $\quad$ **else**
9 $\qquad y := y - 1$

1. (3p) Suomenna oheisen ohjelman rivin 4 väite (älä välitä rivistä 5). __________

Mikään taulukon alkuosan $1,\dots,a-1$ alkio yhteenlaskettuna taulukon minkään alkion kanssa ei tuota maalia.

Jos kvantifiointi oli ilmaistu epäselvästi, vähensin pisteen. Jos vastaus oli tyyppiä "… yhteenlaskettuna taulukon minkään **muun** alkion kanssa …", vähensin 2 pistettä.

2. (3p) Miksi rivin 4 väite pätee, kun riville 4 tullaan ensimmäisen kerran? __________

Silloin $a = 1$, joten väli $1 \leq i < a$ on tyhjä.

Hieman epämääräisistä vastauksista annoin 2 p. Vastauksista, joissa oli oikeakin sisältö mutta sen lisäksi täysin asiaankuulumatonta annoin 1 p.

3. (3p) Kirjoita mahdollisimman vahva, aina rivin 3 alussa voimassa oleva a:n ja y:n arvoja koskeva väite. __________

$1 \leq a \leq y \leq n$

Että $1 \leq a$ nähdään siitä, että a aloittaa arvosta 1 ja vain kasvaa. Vastaavasti nähdään $y \leq n$. Väite $a \leq y$ pätee ensimmäistä kertaa riville 3 tultaessa, koska alussa luvattiin $1 \leq n$, joten silloin $a = 1 \leq n = y$. Jos riville 3 tullaan myöhemmin, on kuljettu silmukan läpi. Silmukan sisään mentäessä oli $a < y$ ja silmukassa vain toinen muuttujista a ja y voi vaihtaa arvoaan ja vain yhdellä, joten silmukan kierroksen lopussa ja siis myös riville 3 palattaessa pätee $a \leq y$.

Kukin epäyhtälö oli yhden pisteen arvoinen. Jos vastaus oli kokonaisuutena pätemätön väite, annoin 0 p, paitsi että virheellisestä väitteestä $a < y$ sakotin vain yhden pisteen. Väitteen muotoilussa esiintyneistä kummallisuuksista sakotin yhdestä kolmeen pisteeseen.

4. (3p) Miten rivin 7 alussa voi päätellä, että $\forall j\,; y < j \leq n : A[a] + A[j] \neq maali$? __________

Koska $1 \leq a \leq y \leq n$, näemme, että $1 \leq a \leq n$. Niinpä rivin 5 kaavassa voidaan valita $j = a$. Saadaan $\forall i\,; y < i \leq n : A[i] + A[a] \neq maali$.

Jos vastauksessa ei oltu vedottu rivin 5 kaavaan vaan oli yritetty päätellä väite muuten, vaadin, että päätelmässä oli jollakin tavalla sanottu "Silloin kun y pieneni arvosta j, päti $A[a] + A[j] > maali$. Koska a ei ole sen jälkeen pienentynyt, sama pätee nykyiselläkin a:n arvolla."

5. (3p) Miten rivin 7 alussa voi päätellä, että $\forall j\,; 1 \leq j < y : A[a] + A[j] \neq maali$? __________

if-testin vuoksi tiedetään, että $A[a] + A[y] < maali$. Rivillä 1 luvataan, että taulukko on nousevassa suuruusjärjestyksessä. Niinpä kun $1 \leq j < y$, pätee $A[j] \leq A[y]$ ja siten $A[a] + A[j] < maali$.

Jos väitettiin että $A[j] < A[y]$, niin yksi piste katosi.

6. (3p) Miten rivin 9 alussa voi päätellä, että $A[a] + A[y] > maali$? __________

Rivillä 3 suljettiin pois mahdollisuus $A[a]+A[y] = maali$, ja rivillä 6 mahdollisuus $A[a]+A[y] < maali$.

7. (3p) Kirjoita rivin 4 kaavan kaltainen mutta vahvempi, rivin 7 alussa voimassa oleva kaava. ______

$\forall i\,;\, 1 \le i \le a : \forall j\,;\, 1 \le j \le n : A[i]+A[j] \neq maali$

Rivin 4 jälkeen ei mitään ole vielä muutettu, joten sen kaava pätee yhä. Tehtävissä 5, 6 ja 4 huomattiin, että $A[a]+A[j] \neq maali$, jos $1 \le j < y$, $j = y$ tai $y < j \le n$. Siis $\forall j\,;\, 1 \le j \le n : A[a]+A[j] \neq maali$. Tämä yhdistettynä rivin 4 kaavaan tuottaa vastauksen.

Tähän tarjottiin vastauksia, joissa väitettiin $A[i]+A[j] < maali$ joillekin i ja j. Tässä on sikäli järkeä, että $A[i]+A[j] < maali$ on aidosti vahvempi väite kuin $A[i]+A[j] \neq maali$. Tämä väite ei kuitenkaan välttämättä päde kaikilla niillä i ja j, joista rivin 4 kaava puhuu. Esimerkiksi kun $maali = 6$ ja $A[1,\ldots,4] = [1,2,3,7]$, on kahden kierroksen jälkeen $a = 2$, $y = 3$ ja $A[1]+A[4] = 8 > maali$. Pätemättömästä kaavasta annoin nolla pistettä. Jos i ja j oli rajattu niin kapealle alueelle, että kaava päti, annoin osan pisteistä. Täysiä en antanut, koska rajaus heikentää väitettä riviin 4 verrattuna.

Kotitehtävä: myös rivin 9 alussa pätee jokin kaava, joka on sukua aiemmin annetuille ja perusteltavissa edellä olevan kaltaisella päättelyllä. Kirjoita kyseinen kaava perusteluineen.

8. (3p) Anna *maali* ____ ja $A[1\ldots4]$ [____, ____, ____, ____] siten, että lopuksi $1 < a < y < n$.

Vaikka $maali = 5$ ja $A[1,\ldots,4] = [1,2,3,7]$,

9. (3p) Anna *maali* ____ ja $A[1\ldots4]$ [____, ____, ____, ____] siten, että lopuksi $1 < a = y < n$.

Vaikka $maali = 6$ ja $A[1,\ldots,4] = [1,2,3,7]$,

10. (3p) Jos lopussa $a = y$, niin mitä tiedetään taulukon A sisällöstä? ______

Joko $A[a]+A[a] = maali$, tai *maali* ei ole muodostettavissa taulukon A kahden alkion summana.

Hyväksyin täysin pistein myös hieman heikomman väitteen: *maali* ei ole muodostettavissa taulukon A kahden **eri** alkion summana. Sen sijaan jos väitettiin että *maali* ei ole muodostettavissa taulukon A kahden alkion summana, niin sakotin 2 p. Tämä väitehän ei päde esimerkiksi silloin, kun $maali = 6$ ja $A[1,\ldots,4] = [1,2,3,7]$.

Jos väitettiin että “ei löytynyt”, niin annoin 0 p. Vaikka matematiikassa sanaa “löytyy” käytetään usein ilmauksen “on olemassa” synonyymina, on niillä tietokoneohjelmien tapauksessa olennaisesti erilainen merkitys: jotakin voi olla olemassa, vaikka ohjelma ei sitä löytäisikään. Ohjelmista päättelyssä avainkysymys usein on, löytääkö ohjelma varmasti sen mitä on olemassa.

11. (3p) Perustele edellinen vastauksesi. ______

Rivin 4 ansiosta tiedetään, että ainakaan mikään paikkaa a ennen sijaitseva alkio ei voi olla osallisena kahden alkion summassa, jonka tulos on *maali*. Rivin 5 vuoksi sama voidaan sanoa alkioista, jotka sijaitsevat paikan y jälkeen. Näin ollen, jos *maali* voidaan muodostaa A:n alkioiden summana, on molempien yhteenlaskettavien sijaittava alueella $a,\ldots,y$. Jos $a = y$, niin silloin molempien yhteenlaskettavien on oltava kohdasta a.

* * *

Tentin ohjelmaa voidaan siis käyttää löytämään tapa muodostaa *maali* taulukon A kahden alkion summana, jos sellainen on olemassa. Jos vaaditaan, että alkiot ovat erit, riittää ajaa ohjelma ja katsoa lopuksi, onko $a < y$. Jos sallitaan alkioiden olevan samat, pitää ohjelman jälkeen vielä tarkastaa, että jos $a = y$, niin onko $2 \cdot A[a] = maali$.

Ohjelman nerokkuus on siinä, että se selviää tehtävästään ilman, että kokeillaan kaikkia pareja. Eri alkioiden pareja on $\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$, mutta ohjelma kokeilee enintään vain $n-1$ paria. Isoilla n tämä tekee ohjelmasta huomattavasti nopeamman kuin mikään kaikkien parien kokeilemiseen perustuva ohjelma. Ohjelma edellyttää, että A on nousevassa suuruusjärjestyksessä, mutta hyvällä järjestämisalgoritmilla A saadaan järjestykseen niin nopeasti, että ohjelman nopeusetu säilyy suurimmalta osaltaan.

Ohjelman juju on sanottu rivien 4 ja 5 kaavoissa. Ne ilmaisevat, että a:n edellä ja y:n jäljessä olevat alkiot eivät tule kysymykseen. Tehtävässä 2 selvitettiin, miksi rivin 4 kaava pätee kun silmukkaan tullaan ensimmäisen kerran. Jos silmukan suoritus menee rivin 9 kautta, ei mikään rivin 4 kaavassa mainittu asia muutu, joten kaava on voimassa kun silmukan alkuun tullaan uudelleen. Jos silmukan suoritus menee rivin 7 kautta, saadaan tehtävässä 7 löydetty kaava, joka rivin 7 vaikutuksesta muuttuu rivin 4 kaavaksi. Ideana on, että riville 7 tultaessa on saatu uutena tietona, että myöskään senhetkisen a:n kohdalla oleva alkio ei tule kysymykseen, joten rivillä 7 liitetään se hylättyjen joukkoon.

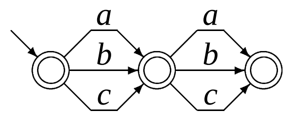
Rivin 4 kaava siis säilyy voimassa, kun silmukan läpi kuljetaan kumpaa tahansa reittiä. Vastaava päättely voidaan tehdä rivin 5 kaavalle.

Niinpä molemmat kaavat ovat voimassa aina kun tullaan silmukan alkuun. Ne ovat voimassa myös ohjelman lopussa, koska sinne joudutaan, kun silmukan alkuun tullaan viimeisen kerran ja todetaan, että silmukan ehto ei (enää) pädekään. Tehtävissä 10 ja 11 niitä käytettiin ohjelman lopussa sen päättelemiseksi, että ohjelma antaa oikean tuloksen.

12. (9p) Olkoon $\Sigma = \{a,b,c\}$. Piirrä mahdollisimman pienet deterministiset äärelliset automaatit siten, että niiden hyväksymät kielet ovat kuvausten mukaiset. ($\lfloor x \rfloor = x$ pyöristettynä alas.)
$B = \{a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \mid \exists i\,;\, 1 \leq i \leq n : a_i = a \wedge \forall j\,;\, i < j \leq n : a_j \neq b\}$

$A = \{a_1 \cdots a_n \in \Sigma^* \mid n < 3\}$	B	$C = \{a^n \mid n > 1 \wedge \lfloor n/3 \rfloor = 1\}$

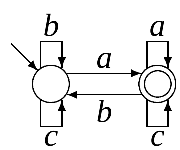
A: Automaatin tulee hyväksyä kaikki merkkijonot, joiden pituus on enintään 2, eikä muuta.



B: Kielen määritelmä poimii ne merkkijonot, joissa on jossakin kohti a ($\exists i\,;\, 1 \leq i \leq n : a_i = a$) siten, että missään myöhemmässä kohdassa ei ole b:tä ($\forall j\,;\, i < j \leq n : a_j \neq b$). Kannattaa huomata, että tämä ei kiellä sellaisia a, joiden jälkeen tulee vielä b, kunhan viimeisenkin b:n jälkeen tulee joskus a.

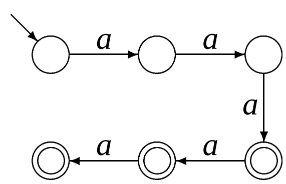
Kun merkkijonoa luetaan, a:n pitää viedä lopputilaan koska sen jälkeen ehto on voimassa. Myöhemmin tulevan b:n pitää "perua" lopputilassa olo, ja sitä myöhempi a palauttaa sen taas voimaan. Vastaus kannattaa siis rakentaa kahdesta tilasta, joista toinen tarkoittaa sitä, että viimeisin a on olemassa eikä sen jälkeen ole tullut b:tä, ja toinen tämän vastakohtaa. Tiloista pitää lisätä vielä kaaret niille aakkosille, joille ei vielä ole kaaria. Nämä aakkoset eivät vaikuta ehdon voimassaoloon, joten niitä varten tehdyt kaaret palaavat sinne mistä lähtivät. Saatiin oheinen kuva.

Vastauksen epädeterministisyydestä sakotin pisteen verran, samoin paluu-b-kaaren puuttumisesta.



C: Kaava valitsee ne pelkästään a:sta koostuvat jonot, joiden pituus on > 1 ja välillä $3, \ldots, 5$. Oheinen kuva näyttää ne.

(Minulla sattui lipsahdus: tarkoitukseni oli kirjoittaa $n > 1 \wedge n \bmod 3 = 1$, jolloin oikea vastaus olisi päättynyt kolmen a:n silmukkaan jossa on yksi hyväksymistila.)



13. (3p) Määrittele tehtävän 12 kieli B säännöllisellä lausekkeella.

Helpoimmalla pääsee, kun ilmaisee sen a:n joka on kohdassa i, ja sanoo, että sitä ennen saa olla mitä vain ($(a|b|c)^*$) ja sen jälkeen mitä tahansa muuta kuin b ($(a|c)^*$):

$$(a|b|c)^* a (a|c)^*$$

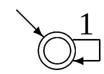
14. (3p) Merkkijono $a_1 a_2 \cdots a_n$ on *palindromi*, jos ja vain jos se on takaperin sama kuin etuperin. Kirjoita logiikan kaava, joka sanoo, että $a_1 a_2 \cdots a_n$ on palindromi.

$\forall i\,;\, 1 \leq i \leq n : a_i = a_{n-i+1}$

Vastaukseksi kelpaa myös $\forall i\,;\, 1 \leq i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor : a_i = a_{n-i+1}$, sillä kun $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, on $n - i + 1 \leq i$, joten testi $a_i = a_{n-i+1}$ joko on tarpeeton koska siinä testataan alkiota itseään vastaan, tai se on jo tehty muodossa $a_{n-i+1} = a_i$.

15. (3p) Osoita, että jos aakkosto on $\{1\}$, niin kieli "palindromit" on säännöllinen.

Kaikki pelkästään ykkösistä koostuvat merkkijonot ovat palindromeja. Kieli on siis 1^* eli $\{1\}^*$. Tämän kielen voi osoittaa säännölliseksi esimerkiksi toteamalla, että 1^* on säännöllinen lauseke, jonka kieli se on; tai piirtämällä oheisen DFA:n.



Oikea periaate mutta väärä kieli (esimerkiksi $(11)^*$) tuotti 2 p.

16. (6p) Osoita, että jos aakkosto on $\{1,2\}$, niin kieli "palindromit" ei ole säännöllinen. Vastaukseksi ei riitä sana "pumppauslemma", pitää myös kertoa mihin merkkijonoon sitä sovellat ja miten epäsäännöllisyys seuraa soveltamisen tuloksesta.

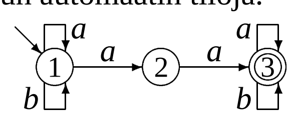
Tästä tehtävätyypistä oli perusteellinen selitys edellisessä tentin palautetekstissä.

17. (6p) Kirjoita BNF-määritelmä kielelle P = "palindromit", kun aakkosto on $\{1,2\}$.

P ::= ε | "1" | "2" | "1" P "1" | "2" P "2"

Jos vastaus tuotti vain pituudeltaan parittomat palindromit, se tuotti 3 pistettä. Samoin kävi, jos se tuotti vain pituudeltaan parilliset palindromit. Jos se tuotti kaikki muut palindromit paitsi ε, annoin 5 p.

18. (6p) Piirrä deterministinen äärellinen automaatti, joka hyväksyy saman kielen kuin kuvan automaatti. Näytä, miten automaattisi tilat vastaavat annetun automaatin tiloja.



Tyhjän merkkijonon luettuaan automaatti voi olla vain tilassa numero 1. Lopputuloksen alkutilaksi tulee siis tila, joka edustaa joukkoa $\{1\}$. Se on hylkäystila, koska tila 1 on hylkäystila.

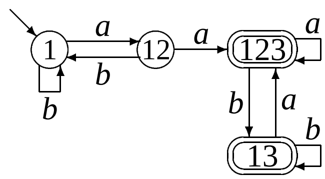
Tilasta 1 käsin alkuperäinen automaatti voi lukea a:n tai b:n. Lukemalla a:n se voi päästä tilaan 1 tai 2. Tästä saadaan lopputulokseen a-kaari alkutilasta tilaan $\{1,2\}$. Tämäkin tila on hylkäystila, koska sekä 1 että 2 ovat hylkäystiloja.

Lukemalla b:n tilasta 1 automaatti pääsee vain tilaan 1. Niinpä lopputuloksen tilasta $\{1\}$ vedetään b-kaari itseensä.

Tiloista 1 ja 2 päästään a:lla tiloihin 1, 2 ja 3; ja b:llä vain tilaan 1. Saadaan a-kaari tilasta $\{1,2\}$ uuteen tilaan $\{1,2,3\}$ ja b-kaari jo tunnettuun tilaan $\{1\}$. Tila $\{1,2,3\}$ on lopputila, koska tila 3 on alkuperäisen automaatin lopputila.

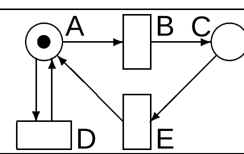
Tilasta $\{1,2,3\}$ tulee a-kaari itseensä ja b-kaari uuteen lopputilaan $\{1,3\}$. Siitä tulee b-kaari itseensä ja a-kaari tilaan $\{1,2,3\}$.

Nyt vastaus on valmis. Koska tilojen numerot ovat yksinumeroisia, ei aiheudu sekaannuksen vaaraa, jos jätämme tilojen esityksestä pois joukkosulkeet ja pilkut.



Oikeassa vastauksessa on siis kaksi lopputilaa $\{1,2,3\}$ ja $\{1,3\}$. Tämä johtuu siitä, että alkuperäisessä automaatissa b-kaaret eivät vie tilaan 2. Jos lopputulos minimoidaan, tilat $\{1,2,3\}$ ja $\{1,3\}$ sulautuvat yhdeksi tilaksi (ja mitään muuta ei tapahdu). Koska minimoidun lopputuloksen tiloilla ei ole enää selkeää vastaavuutta alkuperäisen automaatin tiloihin, sakotin kaksi pistettä, jos oli annettu minimoitu lopputulos niin että lopputilan numerona oli 123. Minimoitu lopputulos muunlaisella tilojen numeroinnilla tuotti 3 pistettä, ja muu oikean kielen hyväksyvä DFA yhden pisteen.

Petriverkko on tässä tentissä rakenne $(P,T,F,\hat{M})$, missä $P \cap T = \emptyset$, $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$ ja $\hat{M} \subseteq P$. Joukon P alkiot piirretään ympyröinä, T suorakaiteina ja F nuolina. Joukon $\hat{M}$ alkioiden sisään piirretään täplä.

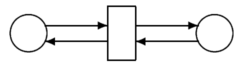


19. (5p) Ilmoita kuvan Petriverkon P, T, F ja $\hat{M}$.

$P = \{A,C\}$, $T = \{B,D,E\}$, $F = \{(A,B),(B,C),(A,D),(D,A),(E,A),(C,E)\}$ ja $\hat{M} = \{A\}$.

20. (3p) Piirrä Petriverkko siten, että $|P| = 2$, $|T| = 1$ ja F on mahdollisimman suuri.

Pitää siis piirtää kaksi ympyrää, yksi suorakaide ja mahdollisimman paljon nuolia. Koska $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, saa nuoli kulkea ympyrästä suorakaiteeseen ja toisinpäin, mutta ei ympyrästä ympyrään eikä suorakaiteesta suorakaiteeseen. Koska F on joukko, saa samalla välillä olla samaan suuntaan enintään yksi nuoli. Koska $\hat{M}$:stä ei ole sanottu mitään, saa ympyröiden sisään piirtää täplät tai jättää piirtämättä.



21. (3p) Olkoon $x \in P \cup T$. Määrittele $\bullet x$ niiden olentojen joukkona, joista on nuoli x:ään. ______________________________

Siis $\bullet x$ on oltava muotoa $\{$ olento $|$ ehto $\}$. Koska nimi x on käytössä tehtävässä, on luontevaa antaa olennoille nimeksi y, siis $\bullet x = \{\ y \mid y$:stä on nuoli x:ään $\}$. Koska nuolten joukko on F, saadaan "y:stä on nuoli x:ään" ilmaistuksi kirjoittamalla $(y,x) \in F$. Saatiin

$$\bullet x \ = \ \{\ y \mid (y,x) \in F\ \}$$

Myös kelpaa $\bullet x \ = \ \{\ y \in P \cup T \mid (y,x) \in F\ \}$. Siinä on mainittu, että y:n pitää olla P:n tai T:n alkio. Tämä vaatimus kyllä seuraa jo siitä, että $(y,x) \in F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$, mutta sen sanomisesta selvästi ei ole haittaa.

Ohjelmointikielen C++ operaattoreiden presedensseille pätee pr(&) > pr(ˆ) > pr(|) > pr(&&) > pr(||). Jos $\{x,y\} \subseteq \{0,1\}$, niin $x \,\&\, y \ = \ x \,\&\&\, y$ ja $x \mid y \ = \ x \,||\, y$.

22. (3p) Valitse x ______, y ______ ja z ______ siten, että $x \,\&\&\, y \mid z \ \neq \ x \,\&\&\, y \,||\, z$.

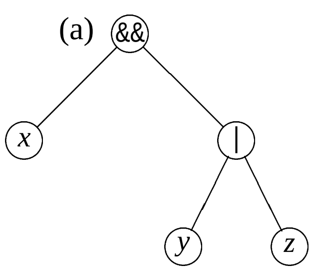
$x = 0$ ja $z = 1$. y saa olla kumpi vain.

Koska && sitoo heikommin kuin |, on $x \,\&\&\, y \mid z = x \,\&\&\, (y \mid z)$. Koska && sitoo vahvemmin kuin ||, on $x \,\&\&\, y \,||\, z = (x \,\&\&\, y) \,||\, z$. Tästä vastaus on helppo päätellä. Vaikkei osaisikaan päätellä, sen löytää kokeilemalla kaikki kahdeksan x:n, y:n ja z:n arvoyhdistelmää.

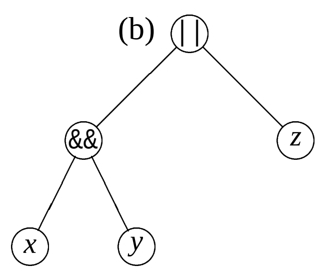
23. (4p) Piirrä lausekepuut lausekkeille (a) $x \,\&\&\, y \mid z$ ja (b) $x \,\&\&\, y \,||\, z$.

Lausekkeiden oikea ryhmittely näytettiin edellisen tehtävän selityksessä. Niistä on helppo piirtää puut:

(a)



(b)



loppu