OHJ-2100 Ohjelmistotieteen perustyökaluja kevät 2012: laskuharjoituksia

Antero Kangas & Antti Valmari

Tampereen teknillinen yliopisto
Ohjelmistotekniikan laitos

30. huhtikuuta 2012

Käytännön asioita

- Kirjoita vastaus puhtaaksi A4-kokoisille papereille tai konsepteille. Nido palautettavat paperit yhteen, jos niitä on useampi kuin yksi.
- Kirjoita vastaus siistillä käsialalla tai tekstinkäsittelyohjelmalla. Vastauksissa tulee käyttää samoja symboleita kuin kurssilla muutenkin.
- Kirjoita palautettavien papereiden ensimmäisen paperin (jos niitä on useita) alkuosaan selvästi näkyville niiden tehtävien numerot, jotka olet valmistautunut esittämään taululla.
- Palautettavissa papereissa tulee selkeästi olla merkittynä palautettujen tehtävien numerot, eri tehtävät selkeästi erotettuna (esim. poikkiviiva tehtävien välissä).
- Kirjoita vastauspaperisi yläreunaan sen laskuharjoitusryhmän tunnus eli kirjain ja numero, johon olet menossa sekä nimesi ja opiskelijanumerosi. Kirjoita opiskelijanumerosi niin selvästi, että assistentti ei vahingossa lue sitä väärin ja kirjaa suorituksesi jonkun muun hyväksi

Vinkkejä

- Ennen kuin alat laskea, lue prujun ko. asiaa käsittelevä osuus tai käy ko. luennot.
- Lue tehtävä huolellisesti.
- Mieti, onko lopullinen vastauksesi järkevä. Prujussa on neuvoja koskien mm. mitä tehdä, jos logiikan kaavan osoittaminen oikeaksi ei onnistu sekä erityisesti miten lisätä “uskoa” tilapredikaatin oikeellisuuteen. Samoja periaatteita voi soveltaa muunkinlaisten tehtävien vastausten oikeellisuuden tai järkevyyden tarkistamiseen.
- Valmistaudu esittämään taululla kaikki palauttamasi tehtävät.
- Saat harjoituksista parhaan hyödyn tutustumalla etukäteen niihinkin tehtäviin, joita et palauta.

Pistejärjestelmä lyhyesti

- Vastauksia ei varsinaisesti pisteytetä, vaan opiskelija palauttaa ne vastaukset, jotka hän on valmistautunut esittämään taululla.
- Assistentti valitsee kuka laskee minkäkin tehtävän taululle.
- Mikäli laskun esitys taululla ei suju, tai tehtävää ei ole tehty riittävän huolella, voidaan kyseinen tehtävä hylätä laskijan osalta ja assistentti tarkistaa hänen muutkin vastauksensa ja harkintansa mukaan joko hyväksyy tai hylkää ne. Assistentilla on kuitenkin oikeus tarkistaa muidenkin kuin vain taululla käyneiden vastaukset ja päättää, onko vastaus riittävä, esimerkiksi että kaikkiin alakohtiin on annettu vastaus.
- Tehtäviä on palautettava hyväksytysti 30, joista ainakin 16 tehtäväryhmistä 8, ..., 15.

Merkkien selityksiä

Tähän lukuun on koottu jatkossa käytettävät matemaattiset ja pseudokoodimerkinnät kaikkein tutuimpia lukuunottamatta.

Matematiikka yleistä

$\lfloor x \rfloor$ Suurin kokonaisluku, joka on enintään yhtäsuuri kuin x. Esimerkiksi $\lfloor 4 \rfloor = \lfloor 4{,}2 \rfloor = \lfloor 4{,}9 \rfloor = 4$ ja $\lfloor -4 \rfloor = -4$ ja $\lfloor -4,2 \rfloor = \lfloor -4{,}9 \rfloor = -5$. Hyödyllisiä kaavoja: $\lfloor x \rfloor \leq x$ ja $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$.

$\lceil x \rceil$ Pienin kokonaisluku, joka on vähintään yhtäsuuri kuin x. Esimerkiksi $\lceil 4 \rceil = 4$ ja $\lceil 4{,}2 \rceil = \lceil 4{,}9 \rceil = 5$ ja $\lceil -4 \rceil = \lceil -4{,}2 \rceil = \lceil -4{,}9 \rceil = -4$. Hyödyllisiä kaavoja: $\lceil x \rceil \geq x$ ja $0 \leq \lceil x \rceil - x < 1$ ja $\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$.

$\star_{i \in I}$ Jos $\star$ on jokin sopivat ehdot täyttävä binäärioperaattori, niin $\star_{i \in I} f(i)$ tarkoittaa, että käydään läpi joukon I alkiot, lasketaan kullekin $f(i)$, ja yhdistetään tulokset operaattorilla $\star$. Esimerkki: $+_{i \in \{2,3,4,5\}} i^2 = 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = \sum_{i=2}^{5} i^2$. Käytetään erityisesti joukko-opin operaattorien $\cup$ ja $\cap$ yhteydessä.

$\rightarrow^*$ Tarkoittaa relaation "$\rightarrow$" *transitiivista sulkeumaa*. Älä sekoita relaatiota "$\rightarrow$" implikatioon. Käytännössä $u \rightarrow^* v$ tarkoittaa, että u:sta pääsee v:hen nollalla tai useammalla askeleella. Esimerkiksi graafin tapauksessa askel on siirtyminen kaaren alkusolmusta sen loppusolmuun.

$\mathbb{N}$ Katso luonnolliset luvut.

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^-$ Katso kokonaisluvut.

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{Q}^-$ Katso rationaaliluvut.

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{R}^-$ Katso reaaliluvut.

assosiatiivisuuden suunta Katso sitovuuden suunta.

kokonaisluvut Luvut $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$. Kokonaislukujen joukkoa merkitään $\mathbb{Z}$. Positiivisten kokonaislukujen joukko on $\mathbb{Z}^+ = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n > 0 \,\}$ ja negatiivisten kokonaislukujen joukko on $\mathbb{Z}^- = \{\, n \in \mathbb{Z} \mid n < 0 \,\}$.

käytössä oleva lukujoukko Tässä tekstissä, ellei käytettävien lukujen joukkoa ole erikseen ilmoitettu, niin käytetään kokonaislukujen joukkoa.

liitännäisyyden suunta Katso sitovuuden suunta.

luonnolliset luvut Luvut $0,1,2,3,\ldots$. Luonnollisten lukujen joukkoa merkitään $\mathbb{N}$. Varoitus: jotkut kirjoittajat tarkoittavat luonnollisilla luvuilla lukuja $1,2,3,\ldots$.

presedenssi Katso sitovuustaso.

rationaaliluvut Rationaalilukujen joukko $\mathbb{Q} = \{\, \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{Z} - \{0\} \,\}$. Positiivisten rationaalilukujen joukko on $\mathbb{Q}^+ = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x > 0 \,\}$ ja negatiivisten rationaalilukujen joukko on $\mathbb{Q}^- = \{\, x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \,\}$.

reaaliluvut Reaalilukujen joukkoa merkitään $\mathbb{R}$. Positiivisten reaalilukujen joukko on $\mathbb{R}^+ = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\}$ ja negatiivisten reaalilukujen joukko on $\mathbb{R}^- = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \,\}$.

sitovuuden suunta Kutsutaan myös nimellä liitännäisyyden tai assosiatiivisuuden suunta. Operaattorin $\star$ sitovuuden suunta määrittelee, miten $x \star y \star z$ tulkitaan. Jos $\star$ sitoo vasemmalle, niin $x \star y \star z = (x \star y) \star z$. Jos $\star$ sitoo oikealle, niin $x \star y \star z = x \star (y \star z)$.

Vertailuoperaattorit eivät matematiikassa sido kumpaankaan suuntaan: kaava $x \leq y = z$ ei tarkoita $(x \leq y) = z$ eikä $x \leq (y = z)$ vaan $(x \leq y) \wedge (y = z)$. Tulkinta $(x \leq y) = z$ ei olisi matematiikassa yleensä edes järkevä, koska $(x \leq y)$ tuottaa totuusarvon, ja totuusarvon vertaamista lukuun tms. ei ole yleensä määritelty. Ohjelmointikielissä tilanne on toinen: niissä esiintyy vasemmalle ja/tai oikealle sitovia vertailuoperaattoreita.

Katso myös sitovuustaso. Katso logiikan jne. operaattorien sitovuuden suunnat otsikon "Logiikka" jne. kohdasta "sitovuuden suunta".

sitovuustaso Kutsutaan myös nimellä presedenssi. Jos operaattori $\star$ sitoo voimakkaammin eli on korkeammalla sitovuustasolla kuin operaattori $\circ$, niin $x \star y \circ z$ tulkitaan $(x \star y) \circ z$ ja $x \circ y \star z$ tulkitaan $x \circ (y \star z)$.

Ihmisellä on taipumus ottaa kaavoja jäsentäessään huomioon kaavan sisällön ja ladonnan antamat vihjeet. Esimerkiksi $\forall x : P(x) \quad \vee \quad \forall x : Q(x)$ tulee helposti tulkittua kuten $(\forall x : P(x)) \vee (\forall x : Q(x))$, vaikka logiikan tässä tekstissä käytettävien sitovuussääntöjen mukaan se tarkoittaa $\forall x : (P(x) \vee \forall x : Q(x))$. Tästä syystä kaavoja kirjoitettaessa kannattaa käyttää ylimääräisiä sulkuja, ja kaavoja lukiessa kannattaa ottaa huomioon mahdollisuus, että kirjoittaja on vahingossa jättänyt pois välttämättömiä sulkuja. Ylimääräisiä sulkuja kannattaa käyttää myös siksi, että kirjallisuudessa käytetään vaihtelevia sitovuussääntöjä.

Katso myös sitovuuden suunta. Katso logiikan jne. operaattorien sitovuustasot otsikon "Logiikka" jne. kohdasta "sitovuustaso".

Logiikka

$\wedge$ "Ja". $\varphi \wedge \xi$ tarkoittaa, että sekä φ että ξ pätee.

$\vee$ "Tai". $\varphi \vee \xi$ tarkoittaa, että φ pätee tai ξ pätee tai molemmat pätevät.

$\neg$ "Ei". $\neg\varphi$ tarkoittaa, että φ ei päde.

$\rightarrow$ Implikaatio loogisena operaattorina. $\varphi \rightarrow \xi$ tarkoittaa, että jos φ pätee, niin myös ξ pätee. Toisin sanoen, $\varphi \rightarrow \xi$ tuottaa False jos ja vain jos φ tuottaa True ja ξ tuottaa False. Vertaa $\Rightarrow$.

$\leftrightarrow$ Ekvivalenssi loogisena operaattorina. $\varphi \leftrightarrow \xi$ on sama kuin $\varphi \rightarrow \xi$ ja $\xi \rightarrow \varphi$ yhdessä. Toisin sanoen, $\varphi \leftrightarrow \xi$ tuottaa True jos ja vain jos joko sekä φ että ξ tuottaa True, tai sekä φ että ξ tuottaa False. Vertaa $\Leftrightarrow$.

$\Rightarrow$ **1.** Implikaatio kahden väittämän vertailuna. Käytetään yleensä ilmaisemaan päättelyaskelta. $\varphi \Rightarrow \xi$ on voimassa jos ja vain jos kaikissa niissä tilanteissa jotka ovat kyseisessä asiayhteydessä mahdollisia ja joissa φ pätee, myös ξ pätee. (Eri tilanteita saadaan vaihtelemalla φ:n ja ξ:n sisällä esiintyvien vapaiden muuttujien arvoja.) Toisin sanoen, $\varphi \Rightarrow \xi$ on voimassa jos ja vain jos $\varphi \rightarrow \xi$ tuottaa aina True riippumatta φ:n ja ξ:n sisällä olevien vapaiden muuttujien arvoista, kunhan ei valita arvoyhdistelmää, joka on kyseisessä asiayhteydessä mahdoton. Esimerkiksi $x > 1 \Rightarrow x+y > 1$ ei yleisesti ole pätevä päätelmä, mutta se on pätevä, jos asiayhteyden vuoksi tiedetään, että $y \geq 0$.

$\Rightarrow$ on samankaltainen kuin $\rightarrow$, mutta $\Rightarrow$ esiintyy kaavojen välissä ja $\rightarrow$ esiintyy kaavan sisällä. Tämän vuoksi saa kirjoittaa $(\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow \zeta$, mutta ei saa kirjoittaa $(\varphi \Rightarrow \xi) \Rightarrow \zeta$, koska siinä $\Rightarrow$ joutuu kaavan sisään. Saa kirjoittaa $\varphi \Rightarrow \xi \Rightarrow \zeta$. Se tarkoittaa samaa kuin $\varphi \Rightarrow \xi$ ja $\xi \Rightarrow \zeta$ yhdessä, mutta $\varphi \rightarrow \xi \rightarrow \zeta$ tarkoittaa $(\varphi \rightarrow \xi) \rightarrow \zeta$. (Varoitus: joillakin kirjoittajilla $\varphi \rightarrow \xi \rightarrow \zeta$ tarkoittaa $\varphi \rightarrow (\xi \rightarrow \zeta)$.)

2. Käytetään usein myös samassa merkityksessä kuin $\rightarrow$.

$\Leftrightarrow$ Ekvivalenssi kahden väittämän vertailuna. $\varphi \Leftrightarrow \xi$ on voimassa jos ja vain jos φ pätee täsmälleen samoissa asiayhteyden sallimissa tilanteissa kuin ξ. Vertaa $\Rightarrow$ ja $\leftrightarrow$.

$\forall$ Kaikki-kvanttori. $\forall x : \varphi(x)$ tarkoittaa, että jokainen alkio x toteuttaa ehdon $\varphi(x)$.

$\forall x;\ \varphi(x) : \xi(x)$ tarkoittaa, että jokainen ehdon φ toteuttava alkio x toteuttaa myös ehdon ξ. Se tarkoittaa siis samaa kuin $\forall x : \varphi(x) \rightarrow \xi(x)$. (Varoitus: tämä tapa käyttää välimerkkejä kvanttorin "$\forall$" yhteydessä ei ole kovin yleinen, vaikka se auttaa ryhmittelemään kaavoja helpommin ymmärrettäviksi.)

$\forall x \in A : \varphi(x)$ tarkoittaa, että jokainen joukon A alkio x toteuttaa ehdon φ. Se tarkoittaa siis samaa kuin $\forall x : x \in A \rightarrow \varphi(x)$.

$\exists$ On olemassa -kvanttori. $\exists x : \varphi(x)$ tarkoittaa, että on olemassa ainakin yksi alkio x, joka toteuttaa ehdon $\varphi(x)$.

$\exists x;\ \varphi(x) : \xi(x)$ tarkoittaa, että on olemassa ainakin yksi ehdon φ toteuttava alkio x, jolle myös ξ pätee. Se tarkoittaa siis samaa kuin $\exists x : \varphi(x) \wedge \xi(x)$. (Varoitus: tämä tapa käyttää välimerkkejä kvanttorin "$\exists$" yhteydessä ei ole kovin yleinen, vaikka se auttaa ryhmittelemään kaavoja helpommin ymmärrettäviksi.)

$\exists x \in A : \varphi(x)$ tarkoittaa, että ainakin yksi joukon A alkio x toteuttaa ehdon φ. Se tarkoittaa siis samaa kuin $\exists x : x \in A \wedge \varphi(x)$.

False Logiikan totuusarvo "epätosi". Jos kaava ei päde, niin sen totuusarvo on False. Usein (varsinkin ohjelmointikielissä), mutta ei tällä kurssilla, False:n tilalla käytetään lukuarvoa 0.

kvanttori Katso $\forall$ ja $\exists$. Joskus kvanttoreiksi kutsutaan myös muita samaan tapaan käytettäviä symboleita.

määrittelemättömät operaatiot kaavoissa Predikaatti on hyvin määritelty, jos ja vain jos siinä olevat määrittelemättömiä operaatioita sisältävät predikaatit eliminoituvat seuraavilla laskusäännöillä: False $\wedge$ (mitä tahansa) $\Leftrightarrow$ (mitä tahansa) $\wedge$ False $\Leftrightarrow$ False, True $\vee$ (mitä tahansa) $\Leftrightarrow$ (mitä tahansa) $\vee$ True $\Leftrightarrow$ True, False $\rightarrow$ (mitä tahansa) $\Leftrightarrow$ True ja (mitä tahansa) $\rightarrow$ True $\Leftrightarrow$ True. Siten esimerkiksi reaaliluvuilla $\forall x : \frac{1}{x} \neq 0 \vee \frac{1}{x} = 0$ ei ole hyvin määritelty, mutta $\forall x : \frac{1}{x} \neq 0 \vee x = 0$ on hyvin määritelty ja tuottaa True. Predikaatit pitää kirjoittaa niin, että ne ovat hyvin määriteltyjä.

sidottu muuttuja Muuttuja x on sidottu esiintyessään kvanttorin vaikutuspiirissä. Jos muuttuja ei ole sidottu, se on vapaa. Esimerkiksi kaavassa $y > 0 \wedge (\forall y : x + y < 0) \vee y = 0$ keskimmäiset y:n esiintymät ovat sidottuja ja reunimmaiset vapaita. Tilanne voidaan tulkita myös siten, että kvanttori esittelee uuden muuttujan, jolla voi olla sama nimi kuin jollakin muulla muuttujalla.

sitovuuden suunta Tässä tekstissä $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\leftrightarrow$ sitovat vasemmalle, ja $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ käyttäytyvät vertailuoperaattorien tavoin (katso $\Rightarrow$). Varoitus: $\rightarrow$ sitovuuden suunta vaihtelee kirjallisuudessa. Katso myös Matematiikka yleistä $\triangleright$ sitovuuden suunta.

sitovuustaso Logiikan operaattoreiden sitovuustasot vaihtelevat kirjallisuudessa. Tässä tekstissä ne ovat voimakkaimmasta heikoimpaan: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, kvanttorit. Kaavojen vertaamiseen käytettävät operaattorit $\Rightarrow$ ja $\Leftrightarrow$ sitovat edellä lueteltuja heikommin ja käyttäytyvät vertailuoperaattorien tavoin. Logiikan ulkopuolisista arvoista totuusarvoja tuottavat operaattorit kuten $=$, $\neq$, $<$ ja $\subseteq$ sitovat voimakkaammin kuin loogiset operaattorit. Katso myös Matematiikka yleistä $\triangleright$ sitovuustaso.

totuusarvo Logiikan kaavan tuottama arvo. Totuusarvoja ovat False ja True.

True Logiikan totuusarvo "tosi". Jos kaava pätee, niin sen totuusarvo on True. Usein (varsinkin ohjelmointikielissä), mutta ei tällä kurssilla, True:n tilalla käytetään lukuarvoa 1.

vapaa muuttuja Katso sidottu muuttuja.

Joukko-oppi

$\emptyset$ Tyhjä joukko, eli joukko, jossa ei ole alkioita. Pätee $A = \emptyset \Leftrightarrow \forall x : x \notin A$.

$\{\ldots\}$ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ on joukko, jonka alkiot ovat $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Pätee $x \in \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \Leftrightarrow x = a_1 \vee x = a_2 \vee \cdots \vee x = a_n$. Esimerkki: *Viikonpäivät* = { *maanantai*, *tiistai*, ..., *sunnnuntai* }.

$\{\}$ on johdonmukainen mutta melko harvoin käytetty vaihtoehtoinen merkintä joukolle $\emptyset$.

$\{x \,|\, \varphi(x)\}$ on niiden alkioiden x joukko, jotka toteuttavat ehdon φ. Esimerkki: $\{x \,|\, \exists y \in \mathbb{Z} : x = 2 \cdot y\}$ on parillisten kokonaislukujen joukko. Pätee $x \in \{x \mid \varphi(x)\} \Leftrightarrow \varphi(x)$.

$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ on niiden A:n alkioiden x joukko, jotka toteuttavat ehdon φ. Pätee $\{x \in A \mid \varphi(x)\} = \{x \mid x \in A \land \varphi(x)\} = \{x \mid \varphi(x)\} \cap A$.

$\{f(x) \mid \varphi(x)\}$ on joukko, joka saadaan käymällä läpi ne alkiot x, jotka toteuttavat ehdon φ; laskemalla jokaiselle $f(x)$; ja kokoamalla tulokset joukoksi. Esimerkki: $\{2 \cdot x \mid x \in \mathbb{Z}\}$ on parillisten kokonaislukujen joukko. Varoitus: koska tämä merkintä ei erikseen kerro, mikä muuttuja käy arvoja läpi, on se epäselvä silloin kun kaavassa on useita muuttujasymboleita.

$\langle \ldots \rangle$ Katso $\times$.

$\in$ Joukkoon kuuluminen. Esimerkki: *Tampere* $\in$ *Suomen_kaupungit*.

$\notin$ Joukkoon kuulumattomuus. Esimerkki: *Melbourne* $\notin$ *Suomen_kaupungit*. Voidaan määritellä kaavalla $x \notin A \Leftrightarrow \neg(x \in A)$.

ε Tyhjä jono, joukon A^0 ainoa alkio. Katso $\times$.

$=$ Joukkojen yhtäsuuruus määritellään $A = B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \leftrightarrow x \in B$.

$\subseteq$ Osajoukko. Esimerkki: *Suomen_kaupungit* $\subseteq$ *Kaupungit*. Pätee $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$ ja $A \subseteq B \Leftrightarrow A \subset B \lor A = B$.

$\subset$ Aito osajoukko. Pätee $A \subset B \;\Leftrightarrow\; A \subseteq B \land A \neq B$. Varoitus: jotkut kirjoittajat käyttävät $\subset$ tarkoittamaan samaa kuin $\subseteq$ tarkoittaa tässä tekstissä.

$\cup$ Unioni. Esimerkki: $\{1,2,3\} \cup \{2,4\} = \{1,2,3,4\}$. Pätee $A \cup B = \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$.

$\cap$ Leikkaus. Esimerkki: $\{1,2,3\} \cap \{2,4\} = \{2\}$. Pätee $A \cap B = \{x \mid x \in A \land x \in B\}$.

$-$ Joukkojen erotus. Esimerkki: $\{1,2,3\} - \{2,4\} = \{1,3\}$. Pätee $A - B = \{x | x \in A \land x \notin B\}$. Kirjallisuudessa käytetään myös symbolia $\setminus$.

$\times$ Tulojoukko. Esimerkki: $\{1,2,3\} \times \{2,4\} = \{(1,2),(1,4),(2,2),(2,4),(3,2),(3,4)\}$. Pätee $A \times B = \{(x,y) \mid x \in A \land y \in B\}$.

Myös useamman kuin kahden joukon yhdistäminen operaattorilla $\times$ on mahdollista: $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid \forall i;\ 1 \leq i \leq n : a_i \in A_i\}$.

Tavallisten sulkujen tilalla käytetään toisinaan $\langle$ ja $\rangle$, jotta eri tulojoukkojen alkiot erottuisivat paremmin toisistaan eivätkä sekottuisi kaavan muihin sulkuihin. Kielten teoriassa sulut ja alkioiden väliset pilkut jätetään usein kokonaan pois.

Silloin kun $n = 1$ katsotaan usein, että $A_1 \times \cdots \times A_n = A_1$. Tarkkaan ottaen se on $\{(a) \mid a \in A_1\}$, mutta (a) ja a katsotaan usein samanveroisiksi.

Silloin kun $n = 0$ on tulojoukossa täsmälleen yksi alkio. Sitä olisi johdonmukaista merkitä ja toisinaan merkitäänkin $()$ tai $\langle\rangle$. Tämä merkintä ei kuitenkaan ole käyttökelpoinen silloin kun sulut jätetään kokonaan pois. Silloin käytetään symbolia ε.

A^n A potenssiin n. $A^n = A \times A \times \cdots \times A$, missä A esiintyy oikealla puolella n kertaa. Toisin sanoen se on kaikki A:n alkioista muodostettavissa olevat monikot, joissa on n alkiota. Erityisesti A^0 on alkioiden merkintätavasta riippuen $\{()\}$, $\{\langle\rangle\}$ tai $\{\varepsilon\}$.

A^* Joukon A alkioista muodostettavissa olevien äärellisten jonojen joukko. Esimerkki: $\{+,-\}^* = \{\varepsilon, +, -, ++, +-, -+, --, +++, ++-, \ldots\}$. Pätee $A^* = A^+ \cup \{\varepsilon\} = A^0 \cup A^1 \cup A^2 \cup \cdots$.

A^+ Joukon A alkioista muodostettavissa olevien epätyhjien äärellisten jonojen joukko. Pätee $A^+ = A^* - \{\varepsilon\} = A^1 \cup A^2 \cup A^3 \cup \cdots$.

$|A|$ Äärellisen joukon A alkioiden määrä. Esimerkkejä: $|\{+,-\}| = 2$, $|\emptyset| = 0$ ja $|\{1,2,3,2,1\}| = 3$.

2^A Joukon A osajoukkojen joukko eli A:n potenssijoukko. Esimerkki: $2^{\{+,-\}} = \{\emptyset, \{+\}, \{-\}, \{+,-\}\}$. Pätee $2^A = \{X \mid X \subseteq A\}$.

$\mathcal{P}(A)$ Sama kuin 2^A.

sitovuuden suunta Tässä tekstissä $\cup$, $\cap$, $-$ ja $\times$ sitovat vasemmalle. $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ja $\subset$ ovat vertailuoperaattoreita ja käyttäytyvät sen mukaisesti. Katso myös Matematiikka yleistä ▷ sitovuuden suunta.

sitovuustaso Tässä tekstissä $\times$ sitoo voimakkaimmin, sitten $\cap$, sitten $\cup$ ja $-$ yhtä voimakkaasti, ja lopuksi $\in$, $\notin$, $\subseteq$ ja $\subset$. Kirjallisuudessa sitovuustasot saattavat vaihdella. Katso myös Matematiikka yleistä ▷ sitovuustaso.

Pseudokoodi (ohjelmakoodi)

Ohjelmien esittämisessä käytettävä pseudokoodi mukailee Algol–Pascal–Ada-kielten merkintöjä. Ehdoissa ja lausekkeissa on suosittu tavallisia matemaattisia merkintöjä. C/C++:sta on poimittu käteviä lisiä, kuten `+=`.

Algol-tyylisten pseudokoodien käyttö on yleistä kirjallisuudessa. Monet C/C++-merkinnät ovat opetuskäyttöön huonoja koska ne ovat sekavia, ja sijoitus- ja yhtäsuuruusvertailuoperaattorit ovat ristiriidassa matematiikan yhtäsuuruusoperaattorin kanssa: matematiikassa yhtäsuuruus on $=$, mutta C++:n `=` tarkoittaa sijoitusta ja yhtäsuuruusoperaattorina on `==`. Lisäksi pseudokoodin erilaisuus auttaa erottamaan yleiset asiat C++-sidonnaisista.

Ellei toisin sanota tai asiayhteydestä ilmene, muuttujat ovat kokonaislukutyyppisiä.

. Tietueen (tai olion) kentän valitsin. Esimerkki: *henkilö.nimi*. Toimii kuten C++:ssa.

$\uparrow$ Osoittimen päässä olevaan tietueeseen viittaaminen. $os\uparrow$ on sama kuin C++:n `*os`, ja $os\uparrow.kenttä$ toimii kuten C++:n `os->kenttä`.

$:=$ (Tavallinen) sijoitusoperaattori. $v := e$ toimii kuten C++:n v `=` e.

$+=$ $v \mathrel{+}= e$ toimii muuten samoin kuin $v := v + e$, paitsi että v:n osoite lasketaan vain kerran. Tällä erolla on harvoin merkitystä. Merkitystä on esimerkiksi silloin, kun v on muotoa $A[f(\ldots)]$, missä funktion f laskenta aiheuttaa sivuvaikutuksia (kuten tulostusta). Kuten C++:n `+=`.

$-=$ Kuten $+=$, mutta vähennyslaskulle. Kuten C++:n `-=`.

$\cdot=$ Kuten $+=$, mutta kertolaskulle. Kuten C++:n `*=`.

and Muuten sama kuin $\wedge$, paitsi että oikeaa puolta ei lasketa, jos vasen tuotti False. Sama kuin C++:n `&&`.

for Silmukkarakenne **for** $i := ala$ **to** $yl\ddot{a}$ **do** ... **endfor** toimii kahta seikkaa lukuunottamatta samoin kuin C++:n `for( i = ala; i <= ylä; ++i ){...}`. Ensiksi, yläraja lasketaan ennen silmukan ensimmäistä kierrosta ja säilyttää arvonsa, vaikka sen laskemisessa tarvittavat tiedot muuttuisivat. Niinpä $yl\ddot{a} := 3$; **for** $i := 1$ **to** $yl\ddot{a}$ **do** $yl\ddot{a} := yl\ddot{a} + 1$ **endfor** lopettaa kun $yl\ddot{a} = 6$, toisin kuin C++:n vastaava silmukka. Toiseksi, **for**-silmukan sisällä ei saa yrittää sijoittaa muutttujaan i. Näin voidaan olla varmoja, että silmukka pyörii enintään $\max(0, yl\ddot{a} - ala + 1)$ kierrosta.

Sana **to** voidaan korvata sanalla **downto**, jolloin silmukkamuuttujan arvo alenee yhdellä joka kierroksella.

if Ehtorakenne **if** *ehto* **then** ... **else** ... **endif** toimii kuten C++:n `if(` *ehto* `){...}else{...}`. **else**-osan saa jättää pois.

mod Jakojäännösoperaattori. Jos $b \neq 0$, niin a **mod** b on se luku x, jolle $b \cdot \lfloor \frac{a}{b} \rfloor + x = a$. Ei-negatiivisilla a:n ja b:n arvoilla käyttäytyy kuten C++:n `%`. Negatiivisilla arvoilla syntyy yleensä eroa, koska C++:n kokonaislukujen `a/b` pyöristää tuloksen (todennäköisesti) nollaa kohti, mutta $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ pyöristää pienempää lukua kohti. Tämän sekavuuden vuoksi **mod**:n merkitys on syytä aina tarkastaa, jos haluaa käyttää sitä kun $a < 0$ tai $b < 0$.

Nil Osoittimen arvo silloin kun se ei osoita minnekään.

or Muuten sama kuin $\vee$, paitsi että oikeaa puolta ei lasketa jos vasen tuotti True. Sama kuin C++:n `||`.

repeat Silmukkarakenne **repeat** ... **until** *ehto* toimii kuten C++:n `do{...}while( !`*ehto* `);`, ts. "..." suoritetaan ainakin kerran. Huomaa, että silmukasta tullaan ulos kun *ehto* pätee; tämän vuoksi C++-vastineessa on ehdon edessä "`!`".

while Silmukkarakenne **while** *ehto* **do** ... **endwhile** toimii kuten C++:n `while(` *ehto* `){...}`.

Taulukko 1: Kreikkalaiset kirjaimet

	englanniksi	suomeksi		englanniksi	suomeksi
$A\ \alpha$	alpha	alfa	$N\ \nu$	nu	nyy
$B\ \beta$	beta	beeta	$\Xi\ \xi$	xi	ksii
$\Gamma\ \gamma\ F$	gamma	gamma	$O\ o$	omicron	omikron
$\Delta\ \delta$	delta	delta	$\Pi\ \pi\ \varpi$	pi	pii
$E\ \epsilon\ \varepsilon$	epsilon	epsilon	$P\ \rho\ \varrho$	rho	rhoo
$Z\ \zeta$	zeta	zeeta	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	sigma	sigma
$H\ \eta$	eta	eeta	$T \tau$	tau	tau
$\Theta\ \theta\ \vartheta$	theta	theeta	$Y\ \upsilon$	upsilon	ypsilon
$I\ \iota$	iota	ioota	$\Phi\ \phi\ \varphi$	phi	phi
$K\ \kappa\ \varkappa$	kappa	kappa	$X\ \chi$	chi	khii
$\Lambda\ \lambda$	lambda	lambda	$\Psi\ \psi$	psi	psii
$M\ \mu$	mu	myy	$\Omega\ \omega$	omega	oomega

Muista, että muuttujien oletusarvoalue on $\mathbb{Z}$.

Tehtäväryhmä 1

Tämän ryhmän tehtävissä ovat voimassa seuraavat määritelmät: $f(x) = x+y+1$ ja $g(y) = y^2+x$ sekä $P(i,n) \Leftrightarrow 1 < i \leq n \wedge 1 \leq i < n$ ja $Q(i,n) \Leftrightarrow 1 < i \leq n \vee 1 \leq i < n$.

1. Olkoon $h(x) = x^2 - ax - 1$.
   (a) Sievennä $h(a+1)$.
   (b) Ratkaise a:n suhteen $h(x+1) = 0$.
   (c) Laske $h(1-2a)$, kun $a = 2$.
   (d) Ratkaise a:n suhteen $h(a/x) = 0$.
   (e) Sievennä $f(f(x))$.
   (f) Sievennä $f(f(y))$.

2. Olkoon $h(x) = 1 - x^2$.
   (a) Sievennä $h((1-a)(1+a))$.
   (b) Sievennä $h(x) - h(1)$, kun $x = 3$.
   (c) Ratkaise x:n suhteen $h(h(x)) = 0$.
   (d) Sievennä $h(a)^2 - h(a^2)$.
   (e) Sievennä $f(g(x))$.
   (f) Sievennä $g(f(y))$.

3. (a) Sievennä $P(i,n)$.
   (b) Sievennä $P(i,2)$.
   (c) Sievennä $Q(i,2)$.
   (d) Sievennä $Q(n-i,n)$.
   (e) Sievennä $P(i,n) \wedge Q(i,n)$.
   (f) Sievennä $\neg P(i,n) \wedge Q(i,n)$

4. (a) Sievennä $Q(i,n)$.
   (b) Sievennä $P(i,3)$.
   (c) Sievennä $Q(i,3)$.
   (d) Sievennä $P(n-i,n)$.
   (e) Sievennä $P(i,n) \vee Q(i,n)$.
   (f) Sievennä $P(i,n) \wedge Q(n-i,n)$.

5. (a) Sievennä $Q(i-1, n-1)$.
   (b) Sievennä $P(2i, n)$.
   (c) Sievennä $Q(i-n, n)$.
   (d) Sievennä $P(i-n, 3)$.
   (e) Sievennä $\neg P(i, n) \vee \neg Q(i, n)$.
   (f) Sievennä $\neg P(i, n) \wedge \neg Q(i, n)$.

6. Taulukko $A[1, \ldots, n]$ on ns. *keko*, jos $A[\lfloor \frac{i}{2} \rfloor] \geq A[i]$ aina, kun $2 \leq i \leq n$. Oheinen algoritmi järjestelee taulukon $A[1, \ldots, n]$ uudelleen niin, että lopputulos on keko.

for $i := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ **downto** 1 **do**
    $j := i$; $x := A[i]$;
    repeat
        $\mathit{vanha} := j$; $j \cdot= 2$;
        if $j < n$ and $A[j+1] > A[j]$ **then** $j \mathrel{+}= 1$ **endif**;
        if $j \leq n$ and $A[j] > x$ **then** $A[\mathit{vanha}] := A[j]$ **endif**
    until $j > n$ or $A[j] \leq x$;
    $A[\mathit{vanha}] := x$
endfor

C++:n taulukot indeksoidaan nollasta $(n-1)$:een eikä yhdestä n:ään. Muuta algoritmia siten, että se sopii C++:n taulukoille.

Vihje: (1) lisää ensin jokaiseen taulukon indeksointiin "-1" tyyliin $A[e] \rightsquigarrow A[e-1]$. Sitten (2) korvaa "juoksutusmuuttuja" i joka paikassa lausekkeella $i+1$, lisää tarvittaessa sulut, siis $(i+1)$. Tee vastaavasti muuttujille j ja *vanha*. Lopuksi (3) sievennä lausekkeet siellä missä mahdollista; esimerkiksi muuta $A[(i+1)-1]$ muotoon $A[i]$. (Korvauksen $i \rightsquigarrow i+1$ tavoitteena oli tehdä tämä nimenomainen, ymmärtämistä helpottava sievennys mahdolliseksi.)

Huomaa: voit aivan hyvin tilapäisesti kirjoittaa $i+1 := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, kunhan sen jälkeen sievennät i:n "paljaaksi" vähentämällä molemmilta puolilta ykkösen. Huomaa myös, että tällöin joudut vähentämään ykkösen vielä yhdestä kohdasta — mistä? Sijoituksen $j+1 \cdot= 2$ sieventämiseksi korvaa se operaattoria := käyttävällä sijoituksella. Kannattaa myös hyödyntää sitä, että kokonaisluvuilla $x < y$ tarkoittaa samaa kuin $x \leq y-1$: se sallii tehdä sievennyksiä tyyliin $j+1 \leq n \rightsquigarrow j < n$.

Valmistaudu esittämään taululla vaiheet (1)–(3).

Tehtäväryhmä 2

Tehtävät tulee ratkaista käyttämättä totuustauluja.

Propositiologiikka

7. (a) Sievennä $\neg(a \wedge b) \wedge a$
   (b) Sievennä $a \wedge b \vee a \wedge b \wedge c$
   (c) Osoita $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$
   (d) Osoita $P \wedge \neg Q \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$
   (e) osoita $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee \neg S) \;\Rightarrow\; Q \vee \neg R$.

8. (a) Sievennä $\neg(a \vee b) \vee \neg(a \wedge b \wedge c)$
   (b) Sievennä $a \wedge b \rightarrow a \vee b$
   (c) Osoita $((P \rightarrow Q) \rightarrow P) \rightarrow P$
   (d) Osoita $((P \wedge \neg Q) \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow Q)$
   (e) osoita $(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \;\Rightarrow\; P \rightarrow (Q \wedge R)$

9. (a) Sievennä $a \vee b \rightarrow a \wedge b$
   (b) Sievennä $a \rightarrow b \wedge a \rightarrow b$
   (c) Osoita $(P \vee Q) \wedge (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \rightarrow R$
   (d) Osoita $(P \vee Q) \wedge \neg P \;\Rightarrow\; Q$
   (e) Osoita $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S) \wedge (P \vee R) \;\Rightarrow\; Q \vee S$

10. (a) Sievennä $a \wedge b \leftrightarrow a \vee b$
    (b) Sievennä $(a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow \neg a)$
    (c) Osoita $P \wedge (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge Q$
    (d) Osoita $Q \wedge (Q \rightarrow R) \wedge (R \rightarrow P) \Rightarrow P$
    (e) Osoita $P \wedge (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \Rightarrow R$

11. Mitkä seuraavista väittämistä pätevät?

    (a) $P \vee Q \rightarrow R \;\Rightarrow\; P \rightarrow R$
    (b) $P \wedge Q \rightarrow R \;\Rightarrow\; P \rightarrow R$
    (c) $P \rightarrow Q \wedge R \;\Rightarrow\; P \rightarrow R$
    (d) $P \rightarrow Q \vee R \;\Rightarrow\; P \rightarrow R$

12. Propositiologiikassa kaava on *konjunktiivisessa normaalimuodossa* jos ja vain jos se on muotoa $\phi_1 \wedge \phi_2 \wedge \cdots \wedge \phi_n$, missä jokainen ϕ_i on klausuuli. Klausuuli on kaava muotoa $\xi_1 \vee \xi_2 \vee \cdots \vee \xi_m$, jossa kaikille $j \in \{1, \ldots, m\}$ pätee ξ_j on muotoa b tai $\neg b$, missä b on propositiosymboli.

    Mitkä seuraavista kaavoista ovat konjunktiivisessa normaalimuodossa ja jos jokin kaava ei ole, niin kerro miksi se ei ole.

    (a) $(P \vee Q) \wedge R$
    (b) $(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee \neg R)$
    (c) $(a \wedge b \wedge c) \vee (b \wedge \neg b)$
    (d) $\neg A \wedge \neg B$
    (e) $A \vee B$
    (f) $\neg(P \vee Q \vee R) \wedge (\neg P \vee Q)$
    (g) $\mathit{sataa} \wedge \mathit{tuulee} \vee \mathit{paistaa} \wedge \neg \mathit{tuulee} \vee \neg \mathit{sataa} \wedge \mathit{paistaa}$
    (h) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_3 \wedge x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4)$

    Sievennä seuraavat kaavat konjunktiiviseen normaalimuotoon

    (i) $P \wedge \neg Q \vee R$
    (j) $P \wedge Q \vee \neg Q \wedge R$
    (k) $P \rightarrow Q \rightarrow R$

Tehtäväryhmä 3

Tämän tehtäväryhmän tehtävät puhuvat taulukoista $A[1 \dots n]$ ja $B[1 \dots m]$. Taulukon (tai sen osan) *pituus* on sen alkioiden lukumäärä. Voit käyttää samassa tehtävässä määrittelemiäsi predikaatteja, jos annat niille nimet ja sopivat parametrit. Voit myös määritellä muita apupredikaatteja ja -käsitteitä. **Kaikkien predikaattien ja käsitteiden tulee olla määriteltyjä kaikilla parametrien arvoyhdistelmillä.**

13. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat

    (a) "A:ssa on alkio x ja kaikki A:n alkiot ovat samoja."

    (b) "A:n jokainen alkio, ensimmäistä lukuunottamatta, on vähintään luvun kaksi (2) suurempi kuin edellinen alkio."

    (c) "B:n sisältö on muuten sama kuin A:n, mutta päinvastaisessa järjestyksessä."

    (d) "Taulukko B on A:n osa."

14. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat

    (a) "A:ssa ei ole alkiota x, mutta kaikki A:n alkiot ovat samoja"

    (b) "A:ssa on alkio, joka on arvoltaan x:ää suurempi, mutta pienempi kuin y.

    (c) "Taulukon A välin $i \dots j$ alkioiden summa on sama kuin taulukon B kaikkien alkioiden summa."

    (d) "Taulukoissa A ja B on yhtä monta alkiota, niiden alkioiden keskiarvo on sama, ja niiden vastaavat alkiot eroavat toisistaan korkeintaan arvon k verran.

15. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat

    (a) "Kaikki A:n alkiot ovat arvoltaan eri kuin x".

    (b) "Alkio x esiintyy taulukossa A useammin kuin B:ssä."

    (c) "Jokaiselle B:n alkiolle pätee, että se joko ei esiinny taulukossa A tai se esiintyy tasan k kertaa."

    (d) "Taulukon B alkiot on laskettu A:n alkioista kolmen peräkkäisen alkion keskiarvoina. Jos A:ssa on alle kolme alkiota, B:n alkiot on laskettu niiden keskiarvoina."

16. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat

    (a) "A:ssa on ainakin yksi alkio, joka on ainakin kerran B:ssä."

    (b) "A:ssa on ainakin yksi alkio, joka on tasan kerran B:ssä."

    (c) "A:ssa on tasan yksi alkio, joka on ainakin kerran B:ssä."

    (d) "A:ssa on tasan yksi alkio, joka on tasan kerran B:ssä."

17. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat. Anna niille nimet ja parametrit.
    (a) $Al(A[1 \ldots n], i, j) :\Leftrightarrow$ "A:n alkiot välillä $i \ldots j$ ovat aidosti laskevassa järjestyksessä".
    (b) "A:ssa on k:n mittainen aidosti laskeva osa."
    (c) "A:ssa on tasan yksi vähintään k:n mittainen aidosti laskeva osa."
    (d) "A:ssa on k:n mittainen aidosti laskeva osa, mutta B:ssä ei ole."

18. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat. Anna niille nimet ja parametrit.
    (a) "A:n alkiot välillä $i \ldots j$ ovat nousevassa järjestyksessä."
    (b) "A:n alkiot välillä $i \ldots j$ ovat laskevassa järjestyksessä."
    (c) Määrittelemme, että taulukon osa on *kupera* jos ja vain jos siinä on alkio, jota edeltävä osa (ko. alkio mukaan lukien) on vähintään kahden mittainen ja nouseva, sekä sitä seuraava osa (ko. alkio mukaan lukien) on vähintään kahden mittainen ja laskeva. Kirjoita predikaatti $kupera(A[1 \ldots n], i, j)$, joka kertoo, onko $A[i \ldots j]$ kupera.
    (d) "A:ssa on kupera osa, mutta B:ssä ei ole."
    (e) Anna esimerkki pienimmästä mahdolliseta kuperasta taulukosta.

Tehtäväryhmä 4

Voit käyttää tehtävissä samassa tehtävässä määriteltyjä predikaatteja ja käsitteitä. **Kaikkien tehtävissä pyydettyjen predikaattien ja käsitteiden tulee olla määriteltyjä kaikilla parametriensa arvoyhdistelmillä.** Voit myös määritellä apupredikaatteja sekä -käsitteitä. Niiden osalta riittää, että ne ovat määritellyt kaikilla niille välitettyjen parametrien arvoilla.

Lisäksi: **Merkintä $A[a \ldots y]$ tarkoittaa taulukkoa, jonka indeksialue on $a, a+1, \ldots, y$ ja $y \geq a-1$.**

19. Oleta, että $\neg(x = 1 \wedge x = n+1)$ ja osoita, että

$$\begin{aligned} & A[x] \geq avain \wedge (x = 1 \vee A[x-1] < avain) \;\vee\; x = n+1 \wedge A[x-1] < avain \\ \Leftrightarrow\; & (x = n+1 \vee A[x] \geq avain) \;\wedge\; (x = 1 \vee A[x-1] < avain). \end{aligned}$$

Vihje: korvaa jokainen vertailu nimellä, esimerkiksi $A[x] \geq avain \rightsquigarrow P$.

20. Ovatko seuraavat tilapredikaatit oikein?

```
x := 1
{ x = 1 }
while x ≠ 0 do
    { x = 1 } x := 2 { x > 1 }
endwhile
{ x = 0 }
{ x = −5 }
```

21. Olkoot p ja q propositiosymboleita. Piirrä kuva, jossa lausekkeet ovat solmuja ja lausekkeiden välillä on nuoli, jos edellinen implikoi seuraavan. Käytä mahdollisimman vähän nuolia eli jos lauseke P implikoi lausekkeen Q, joka puolestaan implikoi lausekkeen R, niin piirrä nuolet vain P:stä Q:hun ja Q:sta R:ään, mutta älä piirrä nuolta P:stä R:ään.

Esimerkiksi lausekkeista True, False, p ja $\neg p$ muodostuu tällainen kuva:

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{False} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ p \arrow[dr] & & \neg p \arrow[dl] \\ & \mathsf{True} & \end{tikzcd}$$

(a) Lausekkeet ovat $\mathsf{True}, \mathsf{False}, p, q, \neg p, \neg q, p \rightarrow q, q \rightarrow p$ ja $p \leftrightarrow q$

(b) Lausekkeet ovat $\mathsf{True}, \mathsf{False}, p, q, \neg p, \neg q, p \vee q, p \wedge q, \neg p \vee \neg q, \neg p \wedge \neg q$ ja $p \leftrightarrow q$

(c) Lausekkeet ovat $\mathsf{True}, \mathsf{False}, p, q, p \wedge q, p \vee q, p \rightarrow q, q \rightarrow p$ ja $p \leftrightarrow q$

(d) Olkoot $a, b \in \mathbb{Z}$ ja lausekkeet $a = a$, $b \neq b$, $a = b$, $a \geq b$, $a > b$, $a \neq b$, $a < b$ ja $a \leq b$.

22. On annettu taulukot $A[1 \ldots n]$ ja $B[1 \ldots n]$. Tutki, päteekö seuraavien lausekkeiden välillä $\Rightarrow$, $\Leftarrow$, $\Leftrightarrow$ vai ei mikään niistä, tapauksilla $n = 0$, $n = 1$ ja $n \geq 2$.

    (a) $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \leq B[i]$ ja $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] < B[i]$.

    (b) $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \leq B[i]$ ja $\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] \leq B[i]$.

    (c) $\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] \leq B[i]$ ja $\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] < B[i]$.

    (d) $\exists i; 1 \leq i \leq n : A[i] < B[i]$ ja $\forall i; 1 \leq i \leq n : A[i] \leq B[i]$.

23. On annettu taulukot $A[1 \ldots n]$ ja $B[1 \ldots m]$. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat. Anna niille nimet ja parametrit.

    (a) $\mathit{ET}(A[1 \ldots n], i, j) :\Leftrightarrow$ "Taulukon A osa $A[i \ldots j]$ on *epätasainen* jos ja vain sen peräkkäiset alkiot eroavat vähintään arvon kaksi (2) verran toisistaan. Tyhjä tai yhden alkion mittainen osa ei ole epätasainen."

    (b) "p on A:n pisimmän epätasaisen osan pituus".

    (c) "A:ssa on pidempi epätasainen osa kuin B:n pisin epätasainen osa on".

    (d) "A:ssa on k kappaletta pisimpiä epätasaisia osia (ne ovat siis keskenään yhtäpitkiä)".

24. On annettu taulukot $A[1 \ldots n]$ ja $B[1 \ldots m]$. Kirjoita predikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat. Anna niille nimet ja parametrit.

    (a) $\mathit{oikukas}(A[1 \ldots n], i, j) :\Leftrightarrow$ "Taulukon A osa $A[i \ldots j]$ on *oikukas* jos ja vain sen peräkkäiset alkiot ovat **vuoronperään** aidosti suurempia tai aidosti pienempiä. Siis joko "aidosti suurempi, aidosti pienempi, aidosti suurempi, jne." tai "aidosti pienempi, aidosti suurempi, aidosti pienempi, jne.". Oikukas osa on vähintään kahden mittainen."

    (b) "k on A:n oikukkaiden osien lukumäärä".

    (c) "A:ssa on enemmän oikukkaita osia kuin B:ssä".

    (d) "A:n pisin oikukas osa on pidempi kuin pisin A:n aidosti kasvava osa".

Tehtäväryhmä 5

25. (a) Olkoon $A[1 \ldots n]$ taulukko. Määrittele predikaatti "x on jaollinen kaikilla taulukon A alkioilla". Anna predikaatille nimi ja parametrit.
    (b) Osoita poistamalla ";" kvanttoreista $\neg\forall x \,;\, \eta : \varphi \;\Leftrightarrow\; \exists x \,;\, \eta : \neg\varphi$.
    (c) Osoita $\neg\forall i : \exists j : i + j = ij$.
    (d) Osoita $P \rightarrow \forall x : Q(x) \Rightarrow \exists x : P \rightarrow Q(x)$.
    (e) Anna esimerkki tilanteesta, jossa $\forall y : \exists x : \varphi \;\Rightarrow\; \exists x : \forall y : \varphi$ ei päde.

26. (a) Olkoon $A[1 \ldots n]$ taulukko. Määrittele predikaatti "Yksikään taulukon A alkioista ei ole jaollinen x:llä". Anna predikaatille nimi ja parametrit.
    (b) Osoita poistamalla ";" kvanttoreista $\exists x \,;\, \eta \vee \gamma : \varphi \;\Leftrightarrow\; (\exists x \,;\, \eta : \varphi) \vee (\exists x \,;\, \gamma : \varphi)$.
    (c) Päteekö $(\exists x : Q(x)) \rightarrow P \Rightarrow \exists x : Q(x) \rightarrow P$?
    (d) Osoita $\forall x : Q(x) \rightarrow P \Rightarrow (\forall x : Q(x)) \rightarrow P$.
    (e) Anna esimerkki tilanteesta, jossa $\exists x : \forall y : \varphi \;\Rightarrow\; \forall x : \exists y : \varphi$ ei päde.

27. Sievennä seuraavat kaavat, kun $n = 0, 1, 2$. Esitä tulokset taulukossa, jossa sarakkeina ovat n:n arvot, riveillä tehtävän kohdat ja soluissa kyseisen kaavan sievennetty muoto.

    (a) $\forall\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i) \wedge P(n)$
    (b) $\Big(\forall\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i)\Big) \wedge P(n)$
    (c) $\forall\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i) \vee P(n)$
    (d) $\Big(\forall\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i)\Big) \vee P(n)$
    (e) $\exists\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i) \wedge P(n)$
    (f) $\Big(\exists\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i)\Big) \wedge P(n)$
    (g) $\exists\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i) \vee P(n)$
    (h) $\Big(\exists\, i \,; 1 \leq i \leq n : P(i)\Big) \vee P(n)$

28. Kirjassa Gries, Schneider: *A Logical Approach to Discrete Math* otettiin käyttöön merkintä

$$(\star\, x : X \mid R : E)$$

tarkoittamaan: käydään läpi kaikki X-tyyppiset oliot x joille R pätee, lasketaan kullekin E ja yhdistetään tulokset $\star$:llä. Alussa saa antaa useampiakin muuttujia kuin yhden, saman tyypin saa antaa monille muuttujille (esim. "$x : X,\ y, z : Y$"), ja tyypit saa jättää pois, jos ne ovat asiayhteydestä selvät. R:n saa jättää pois, jos se on True.

Laske (näytä ainakin yksi välivaihe) mitä on

(a) $(+ i \mid 0 \le i < 4\ : i \cdot 8)$

(b) $(\cdot\, i : \{0, 1, 2\} \mid i + (i + 1))$

Esitä seuraavat ko. merkinnällä:

(c) $\exists\, i, j\ ;\ 1 \le i \le j \le n : A[i] > 2A[j]$.

(d) $\exists\, i\,; 1 \le i \le n : A[i] = x \wedge \forall\, j\,; 1 \le j \le n : i \ne j \rightarrow A[j] \ne A[i]$.

(e) $\bigcap_{i \in I} \left(A_i - \bigcup_{j \in I} B_j \right)$.

(f) Mitä ominaisuuksia on tarpeen (tai ainakin viisasta) vaatia operaattorilta "$\star$"? Riittää, jos keksit yhdenkin. Vihje: kokeile sen paikalle vähennyslaskua.

(g) Mikä on lausekkeen $(\star\, x \mid \mathsf{False} : x)$ arvo (tai on hyvä valinta sen arvoksi), kun "$\star$" on "$+$", "$\cdot$", "$\vee$", "$\wedge$" tai "$\cup$"? Entä jos "$\star$" on "$\cap$"?

29. Olkoon $A[1 \ldots n]$ taulukko. Täydennä seuraavat kaavat niin, että ne palauttavat False, jos indeksoidaan taulukon rajojen ohi. Muussa tapauksessa niiden pitää palauttaa sama arvo kuin alunperinkin. Sievennä vastauksesi.

(a) $10 < A[i] < 20$.

(b) $A[i + 1] + i = A[2i]$.

(c) $2 < A[i] \wedge A[A[i] + 1] > A[n - A[n - i]\,]$.

Täydennä seuraava kaava niin, että se palauttaa True, jos indeksoidaan taulukon rajojen ohi. Muussa tapauksessa sen pitää palauttaa sama arvo kuin alunperinkin.

(d) $A[i - 1] = A[A[n - i]\,]$.

30. Pätevätkö seuraavat kaavat? Joko osoita joukko-opin loogisten kaavojen avulla tai anna vastaesimerkki. **Huomaa, että koska universumia ei ole annettu, et voi käyttää komplementtikaavoja.**

(a) $A \cup (A - B) = A$

(b) $A \cap B = B - (B - A)$

(c) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$

(d) $(A \times B) \cup C = (A \cup C) \times (B \cup C)$

Tehtäväryhmä 6

31. Taulukon yhtenäistä osaa, jonka kaikki alkiot ovat samoja, sanotaan *laakioksi*. Määrittele seuraavat käsitteet. Anna niille nimet ja sopivat parametrit. Käytä hyväksesi tässä tehtävässä määrittelemiäsi predikaatteja. Kaikkien pyydettyjen kaavojen tulee olla määriteltyjä kaikkien parametriensä arvoyhdistelmillä.

   (a) Määrittele predikaatti, joka kertoo, onko taulukon $A[1 \ldots n]$ kohdasta j alkaen l:n verran perättäisiä alkioita samoja.

   (b) Määrittele predikaatti, joka kertoo, onko taulukossa $A[1 \ldots n]$ l:n pituista laakiota.

   (c) Määrittele predikaatti, joka kertoo, onko p taulukon $A[1 \ldots n]$ pisimmän laakion pituus.

   (d) Taulukon $A[1 \ldots n]$ laakio $A[i \ldots j]$ on *maksimaalinen*, jos sitä ei voi laajentaa pidemmäksi laakioksi. Taulukon $A[1 \ldots 6] = [0, 3, 3, 3, 2, 2]$ maksimaaliset laakiot ovat $A[1 \ldots 1]$, $A[2 \ldots 4]$ ja $A[5 \ldots 6]$. Määrittele predikaatti *maksimaalinen-laakio*$(A[1 \ldots n], i, l)$, joka tarkoittaa, että $A[i \ldots i + l - 1]$ on $A[1 \ldots n]$:n maksimaalinen laakio.

   (e) Määrittele funktio, joka palauttaa taulukon $A[1 \ldots n]$ maksimaalisten laakioiden lukumäärän.

32. On annettu aliohjelmat `bool P( int x )` ja `bool Q( int x, int y )`, jotka palauttavat `true` jos ja vain jos predikaatit $P(x)$ ja $Q(x, y)$ pätevät. Myös on annettu funktio `int f( int x )`, joka laskee funktion $f(x)$. Oletetaan, että $x \in \{0, \ldots, n - 1\}$ ja $y \in \{0, \ldots, n - 1\}$. Saat tehdä seuraavat ohjelmat joko C++:lla tai pseudokoodilla.

   (a) Tee ohjelma, joka tulostaa joukon $\{\ x \mid P(x)\ \}$ alkiot suuruusjärjestyksessä.

   (b) Tee ohjelma, joka tulostaa joukon $\{\ (x, y) \mid Q(x, y)\ \}$ alkiot jossain järjestyksessä.

   (c) Tee ohjelma, joka tulostaa joukon $\{\ f(x) \mid P(x)\ \}$ alkiot jossain järjestyksessä. Ei haittaa, vaikka sama alkio tulostettaisiin monta kertaa.

   (d) Olkoon $A = \{\ x \mid P(x)\ \}$ ja $B = \{\ x \mid \exists y : Q(x, y)\ \}$. Tee ohjelma, joka tulostaa joukon $A \cap B$ alkiot suuruusjärjestyksessä.

33. A ja B ovat äärellisiä joukkoja. Perustele vastauksesi.

   (a) Miksi $|\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| \leq n$ eikä $\ldots = n$?

   (b) Millä n:n arvoilla varmasti $|\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}| = n$?

   (c) Ilmaise $|A \cup B|$ lukujen $|A|$, $|B|$ ja $|A \cap B|$ avulla.

   (d) Olkoon $A \subseteq B$. Mitä pätee luvuille $|A|$ ja $|B|$. Entä paljonko ovat $|A \cup B|$, $A \cap B|$, $|A - B|$, $|B - A|$ ja $|A \times B|$?

   (e) Kirjoita auki joukot $\{\emptyset, \{a\}, a\}^2$ ja $2^{\{\emptyset, \{a\}, a\}}$

   (f) Mitä on $A^2 \cap 2^A$?

   (g) Paljonko ovat $|A^n|$ ja $|2^A|$? Vastaako (e)-kohdan vastauksesi tätä tulosta?

34. Joukoille käytetään usein seuraavan tapaisia merkintöjä:
$\{x \mid P(x)\}$, $\{x \in A \mid P(x)\}$ ja $\{f(x) \mid P(x)\}$.

(a) Griesin ja Schneiderin kirjassa käytetään joukoille merkintää $\{\ x : X \mid R : E\ \}$ (katso tehtävä 28). Esitä ym. joukot sillä. X, R ja E ovat kuten tehtävässä 28.

(b) Miten ym. joukot ja (a)-kohdan merkintätapa voidaan esittää tehtävän 28 merkinnällä?

(c) Miten joukot $\{x \in A \mid P(x)\}$, $\{f(x) \mid P(x)\}$ ja $\{\ x : X \mid R : E\ \}$ voidaan esittää merkinnällä $\{x \mid P(x)\}$?

Anna vastauksesi taulukkona, jossa riviotsikkoina ovat esitettävät joukot, sarakotsikkoina kohdat (a), (b) ja (c) sekä soluissa ko. vastauksesi.

35. Kirjoita auki joukot:

(a) $\{2\}^2$

(b) $2^{\{2\}}$

(c) $\{2^2\}$

(d) $\{2^{2^2}\}$

(e) $\{(2^2)^2\}$

(f) $\{2^2\}^2$

(g) $\{2\}^{2^2}$

(h) $(\{2\}^2)^2$

(i) $2^{\{2^2\}}$

(j) $2^{\{2\}^2}$

(k) $(2^{\{2\}})^2$

(l) $2^{2^{\{2\}}}$

36. Määrittele seuraavat joukot. Esitä jaollisuus **mod** :in avulla.

(a) Joukon alkiot ovat alkuluvut, ts. ne ovat arvoltaan vähintään 2 ja jaollisia vain 1:llä ja itsellään.

(b) Joukon alkiot ovat joukosta A poimittujen kahden eri alkion summat.

(c) Joukon A_i alkiot ovat lukupareja. Parin ensimmäinen luku on positiivinen ja pienempi kuin parin toinen luku, joka on pariton ja pienempi kuin i.

(d) Olkoon $a, b, c, x \in \mathbb{C}$. Joukon alkiot ovat yhtälön $ax^4 + bx^2 + c = 0$ kaikki juuret.

(e) Olkoon $a, b, c, x \in \mathbb{R}$. Joukon alkiot ovat yhtälön $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ reaalijuurten joukot, kun kertoimet a_1, a_2 ja a_3 valitaan joukosta $\{a, b, c\}$. **Huomaa, että pyydetyn joukon alkiot ovat joukkoja.** Tämän kohdan vastauksesi ei tarvitse olla täysin oikein.

Tehtäväryhmä 7

37. On annettu lausekkeet:

$$\begin{array}{ll} A1 :\Leftrightarrow \forall i\,; 1 \le i \le n : A[i] = x, & E1 :\Leftrightarrow \exists i\,; 1 \le i \le n : A[i] = x, \\ A2 :\Leftrightarrow \forall i\,; 1 \le i < n : A[i] = x, & E2 :\Leftrightarrow \exists i\,; 1 \le i < n : A[i] = x, \\ A3 :\Leftrightarrow \forall i\,; 1 \le i \le n : A[i] \le x, & E3 :\Leftrightarrow \exists i\,; 1 \le i \le n : A[i] \le x, \\ A4 :\Leftrightarrow \forall i\,; 1 \le i \le n : A[i] < x, & E4 :\Leftrightarrow \exists i\,; 1 \le i \le n : A[i] < x. \end{array}$$

Piirrä lausekkeista True, False, *A1*, *A2*, *A3*, *A4*, *E1*, *E2*, *E3* ja *E4* tehtävän 21 mukainen kuva eli lausekkeet ovat solmuja, joiden välissä on minimimäärä nuolia, jotka kuvaavat lausekkeiden väliset implikaatio-suhteet. Piirrä kuvat seuraavista tapauksista:

(a) $n \ge 2$,

(b) $n \ge 1$ ja

(c) $n \ge 0$.

Tee ainakin kohta (a).

38. Kirjoita tilapredikaatit, jotka määrittelevät seuraavat asiat.

(a) *yksijanolla*$(A[1 \ldots n], B[1 \ldots m]) :\Leftrightarrow$ “A:ssa on tasan yksi yhden suuruinen alkio ja B:ssä ei ole tasan yhtä nollan suuruista alkiota”.

(b) *summalkm*$(A[1 \ldots n], a, B[1 \ldots m], b) :\Leftrightarrow$ “B:ssä on alkiota b yhtä monta kappaletta kuin A:n alkioiden a yhteenlaskettu summa on”.

(c) *anagrammi*$(A[1 \ldots n], B[1 \ldots m]) :\Leftrightarrow$ “B:ssä on täsmälleen samat alkiot kuin A:ssa, mutta eri järjestyksessä”. Anna esimerkki pienimmästä mahdollisesta anagrammista.

(d) *samatsummat*$(A[1 \ldots n]) :\Leftrightarrow$ “A:n parittomissa indekseissä olevien alkioiden summa on sama kuin parillisissa alkioissa olevien alkioiden summa”. Tässä tehtävässä nollan (0) alkion summaa ei ole määritelty.

39. On annettu taulukko $A[1 \ldots n]$. Määrittele seuraavat käsitteet ja anna niille lyhyt nimi ja parametrit.

(a) Funktio *set*, joka ottaa parametrikseen taulukon A ja tuottaa joukon, jonka alkiot ovat A:n alkiot.

(b) Joukko, jossa ovat kaikki A:n kolmella (3) jaolliset alkiot.

(c) Funktio, joka palauttaa A:n kolmella (3) jaollisten parillisten alkioiden lukumäärän.

(d) Joukko, jonka alkiot ovat A:n kolmella jaollisten eri alkioiden parien summat.

40. Määrittele seuraavat predikaatit tai käsitteet ja anna niille lyhyt nimi ja parametrit.

(a) Predikaatti “Joukossa A ei ole pienintä alkiota”. Anna esimerkki tällaisesta joukosta.

(b) Predikaatti “Joukossa A ei ole pienintä alkiota, mutta on suurin alkio”. Anna esimerkki tällaisesta joukosta.

(c) Predikaatti “Joukko A on äärellinen ja sen alkioiden summa on pienempi kuin sen alkioiden määrä”.

(d) Joukko, jonka alkiot ovat joukon A eri alkioista muodostettuja pareja ja A:ssa on alkio joka on arvoltaan aidosti näiden välissä.

41. Täytä $\{\underline{\hspace{4cm}}\}$:t ohjelman toimintaa mahdollisimman hyvin kuvaavilla tilapredikaateilla.

(a)

$\{\ x = 0\ \}$
$x := x + 1$
$\left\{\ \underline{\hspace{4cm}}\ \right\}$
$x := x \cdot y$
$\left\{\ \underline{\hspace{4cm}}\ \right\}$

(b)

$A[1 \ldots n]$ on kiinteä.
$\{\ n \geq 1\ \}$
$i := 1;\ S := 0;$
$\{\ 1 = i \leq n \wedge S = 0 = \sum_{j=1}^{i-1} A[j]\ \}$
while $i \leq n$ **do**
    $\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
    $S := S + A[i];$
    $\{\ 1 \leq i \leq n \wedge S = \sum_{j=1}^{i} A[j]\ \}$
    $i := i + 1;$
    $\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
end while
$\left\{\ \underline{\hspace{2cm}} \wedge\ S = \sum_{j=1}^{i-1} A[j]\ \right\}$
$\{\ S = \sum_{j=1}^{n} A[j]\ \}$

(c) On määritelty $Q(A[1 \ldots n]) :\Leftrightarrow \forall i, j\,; 1 \leq i < j \leq n : A[i] \neq A[j]$. Kerro sanallisesti, mitä Q tarkoittaa.

x on kiinteä
$\{\ n \geq 0 \wedge Q(A[1 \ldots n])\ \}$
$A[n+1] := x;\ i := 1;$
$\{\ 1 \leq i \leq n+1 \wedge Q(A[1 \ldots n]) \wedge A[n+1] = x \wedge \forall j\,; 1 \leq j < i : A[j] \neq x\ \}$
while $A[i] \neq x$ **do**
    $\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
    $i := i + 1;$
    $\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
end while;
$\{\ 1 \leq i \leq n+1 \wedge Q(A[1 \ldots n]) \wedge A[n+1] = x \wedge A[i] = x \wedge \forall j\,; 1 \leq j < i : A[j] \neq x\ \}$
if $i = n + 1$ **then**
    $\{\ 1 \leq i = n+1 \wedge Q(A[1 \ldots n+1]) \wedge A[i] = x \wedge \forall j\,; 1 \leq j < i : A[j] \neq x\ \}$
    $n := n + 1;$
    $\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
end if;
$\left\{\ \underline{\hspace{12cm}}\ \right\}$
$\{\ Q(A[1 \ldots n]) \wedge \exists i\,; 1 \leq i \leq n : A[i] = x\ \}$

42. Täytä { ____________________ }:t ohjelman toimintaa mahdollisimman hyvin kuvaavilla tilapredikaateilla.

(a)

$\{\ x = x_0\ \}$
if $x < 0$ **then**
    { ____________________ }
    $x := -x$
    { ____________________ }
end if
{ ____________________ }
$\{\ x = |\ x_0\ |\ \}$

(b)

$A[1 \ldots n]$ on kiinteä.
$\{\ \exists\, j; 1 \leq j \leq n : A[j] = x\ \}$
$i := 1$
$\{\ 1 = i \leq n \wedge (\forall j\, ; 1 \leq j < i : A[j] \neq x) \wedge \exists j\, ; i \leq j \leq n : A[j] = x\ \}$
while $A[i] \neq x$ **do**
    { ____ }
    $i := i + 1$
    { ____ }
end while
$\{\ 1 \leq i \leq n \wedge (\forall j\, ; 1 \leq j < i : A[j] \neq x) \wedge x = A[i]\ \}$

(c) On määritelty $R(A[1 \ldots n], B[1 \ldots n]) :\Leftrightarrow \forall i\, ; 1 \leq i \leq n : A[i] = \sum_{k=1}^{i} B[k]$. Kerro sanallisesti, mitä R tarkoittaa.

$\{\ n \geq 1 \wedge A[1 \ldots n] = A_0\ \}$
$i := 2;$
$\{\ 2 = i \leq n + 1 \wedge R(A[1 \ldots i-1], A_0[1 \ldots i-1]) \wedge \forall j\, ; i \leq j \leq n : A[j] = A_0[j]\ \}$
while $i \leq n$ **do**
    { ____ }
    $A[i] = A[i] + A[i-1];$
    $\{\ 2 \leq i \leq n \wedge R(A[1 \ldots i], A_0[1 \ldots i]) \wedge \forall j\, ; i < j \leq n : A[j] = A_0[j]\ \}$
    $i := i + 1;$
    { ____ }
end while;
{ ____ }
$\{\ R(A[1 \ldots n], A_0[1 \ldots n])\ \}$

Tehtäväryhmä 8

43. Luettele seuraavista vapaat ja sidotut muuttujat. P, Q ja R ovat predikaattisymboleja eivätkä muuttujia.

    (a) $2 \cdot i \leq j - 1 \wedge j \leq n$

    (b) $\forall x \in A : \exists y \in A : y < x$

    (c) $\exists i \,; 1 \leq i \leq n : A[i] = x \wedge \forall j \,; 1 \leq j \leq n : j \neq i \rightarrow A[i] \neq A[j]$

    (d) $P(x) \rightarrow (\forall x : Q(x, y)) \wedge \exists y : R(x, y)$

    (e) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \big(i + \sum_{j=i}^{n-i+1} j\big)$

    (f) $\displaystyle\bigcap_{i \in I} \{ \, j \mid \exists k \in I : i < j < k \, \}$

44. Tunnista seuraavista ohjelmista ja spesifikaatioista kiinteät muuttujat, tavalliset muuttujat, syötemuuttujat, tulosmuuttujat, apumuuttujat, haamumuuttujat, sidotut muuttujat ja vapaat muuttujat. Annan vastauksesi taulukkona, missä riveinä ovat muuttujien luokittelut, sarakkeina osatehtävät ja soluissa sarakkeen mukaisen osatehtävän rivin luokittelua vastaavat muuttujat. Huomaa, että vapaista ja sidotuista muuttujista puhutaan kaavakohtaisesti.

    (a)
    $\{ \; x = x_0 \wedge y = y_0 \; \}$
    $t := x;\ x := y;\ y := t$
    $\{ \; x = y_0 \wedge y = x_0 \; \}$

    (b)
    $\{ \; \forall i;\ 1 \leq i \leq n-1 : A[i] \leq A[i+1] \; \}$
    $a := 1;\ y := n+1$
    while $a < y$ **do**
        $v := \lfloor \frac{a+y}{2} \rfloor$
        if $A[v] < avain$ **then** $a := v+1$ **else** $y := v$ **endif**
    endwhile
    $\{ \; (a = n+1 \vee A[a] \geq avain) \;\wedge\; (a = 1 \vee A[a-1] < avain) \; \}$

    (c)
    $\{ \; \forall\, i;\ 1 \leq i \leq n : A[i] = A_0[i] \; \}$
    for $i := 2$ **to** n **do** $A[i] \mathrel{+}= A[i-1]$ **endfor**
    $\{ \; \forall\, i;\ 1 \leq i \leq n : A[i] = \sum_{j=1}^{i} A_0[j] \; \}$

    (d)
    $A[1 \ldots n]$ on kiinteä.
    $\{ \; \exists\, j; 1 \leq j \leq n : A[j] = x \; \}$
    $i := 1$
    while $A[i] \neq x$ **do**
        $\{ \; 1 \leq i < n \wedge (\forall j \,; 1 \leq j \leq i : A[j] \neq x) \wedge \exists j \,; i < j \leq n : A[j] = x \; \}$
        $i := i + 1$
    end while
    $\{ \; 1 \leq i \leq n \wedge (\forall j \,; 1 \leq j < i : A[j] \neq x) \wedge x = A[i] \; \}$

45. On annettu seuraavat spesifikaatiot:
    1. muuttuja x on kiinteä, $\{\ P\ \}\ ohj\ \{\ Q\ \}$
    2. muuttuja x on tavallinen, $\{\ P \land x = x_0\ \}\ ohj\ \{\ Q \land x = x_0\ \}$
    3. muuttuja x on kiinteä, $\langle\ P\ \rangle\ ohj\ \langle\ Q\ \rangle$
    4. muuttuja x on tavallinen, $\langle\ P \land x = x_0\ \rangle\ ohj\ \langle\ Q \land x = x_0\ \rangle$

    (a) Mitä nämä spesifikaatiot vaativat ohjelmalta?
    (b) Laita nämä spesifikaatiot järjestykseen niin, että heikompi on ennen vahvempaa. Vertaa tehtävään 21.

46. On annettu seuraavat spesifikaatiot:
    1. $\{\ \mathsf{True}\ \}\ ohj\ \{\ x = 0\ \}$
    2. $\{\ \mathsf{False}\ \}\ ohj\ \{\ x = 0\ \}$
    3. $\langle\ \mathsf{True}\ \rangle\ ohj\ \langle\ x = 0\ \rangle$
    4. $\langle\ \mathsf{False}\ \rangle\ ohj\ \langle\ x = 0\ \rangle$
    5. $\{\ \mathsf{True}\ \}\ ohj\ \{\ \mathsf{True}\ \}$
    6. $\{\ \mathsf{True}\ \}\ ohj\ \{\ \mathsf{False}\ \}$
    7. $\langle\ \mathsf{True}\ \rangle\ ohj\ \langle\ \mathsf{True}\ \rangle$
    8. $\langle\ \mathsf{True}\ \rangle\ ohj\ \langle\ \mathsf{False}\ \rangle$

    (a) Mitä nämä spesifikaatiot vaativat ohjelmalta?
    (b) Laita nämä spesifikaatiot järjestykseen niin, että heikompi on ennen vahvempaa. Vertaa tehtäviin 21 ja 45.

47. Harjoitellaan spesifikaation kirjoittamista.

    (a) Anna spesifikaatio eli alkuehto ja loppuehto ohjelmalle, joka hakee taulukosta alkion, jonka luvataan olevan taulukossa. Kuten seuraavasta kohdasta ilmenee, sinun tulee päättää, kuinka "ohjelma palauttaa tulokset" eli etsittävän alkion.
    (b) Kuinka spesifikaatiosta näkyy kuinka ohjelma palauttaa tulokset?
    (c) Kuinka ohjelman tulee käyttäytyä, jos alkio ei ole taulukossa?
    (d) Entä jos se on siellä monta kertaa?

48. Anna spesifikaatiot seuraaville ohjelmille

    (a) Boolean-tyyppinen muuttuja saa arvon True jos ja vain jos syötetaulukoille $A[1 \ldots n]$ ja $B[1 \ldots m]$ pätee, että B on A:n osa ainakin kahdesti.
    (b) Ohjelma nollaa taulukon $A[1 \ldots n]$ ne alkiot, joiden arvo ei ole välillä $a \ldots b$.
    (c) Ohjelma saa nousevaan järjestykseen lajitellut taulukot $A[1 \ldots n]$ ja $B[1 \ldots m]$, ja tuottaa nousevassa järjestyksessä olevan taulukon, jossa ovat täsmälleen kaikki A:n ja B:n alkiot, siis merge-operaation.
    (d) Taulukon $A[1 \ldots n]$ osa $A[a \ldots y]$ on *loivasti laskeva*, jos sen sisällä jokainen (paitsi ehkä ensimmäinen) alkio on yhtä suuri tai korkeintaan kahden (2) verran suurempi kuin edeltävä alkio. Ohjelman tulee etsiä a:lle ja y:lle sellaiset arvot, että syötetaulukon $A[1 \ldots n]$ osa $A[a \ldots y]$ on mahdollisimman pitkä loivasti laskeva.

Tehtäväryhmä 9

49. Käsite *suunnattu graafi* määritellään parina (V, E), missä V on *solmujen joukko*, E on kaarien joukko ja $E \subseteq V \times V$. Kaari on siis kahden solmun muodostama pari (*alkusolmu*, *loppusolmu*). Suunnattu graafi piirretään piirtämällä ympyrät solmuiksi ja vetämällä nuoli kunkin kaaren alkusolmusta loppusolmuun. Solmun nimi kirjoitetaan solmun viereen.

   (a) Piirrä suunnattu graafi $\big(\{1,2,3,4,5\}, \{(1,4),(1,5),(2,3),(5,5),(3,2),(5,2),(3,4),(2,3)\}\big)$.

   (b) Piirrä suunnattu graafi $\big(\{i \textbf{ mod } n \mid i \in \mathbb{N}\}, \{\, (i \textbf{ mod } n, j \textbf{ mod } n) \mid i \in \mathbb{N} \wedge j \in \mathbb{N} \wedge (i \textbf{ mod } 3 = 0 \wedge j \textbf{ mod } 3 = 1 \vee i \textbf{ mod } 3 = 2 \wedge j \textbf{ mod } 3 = 0 \vee i \textbf{ mod } 3 = 1 \wedge j \textbf{ mod } 3 = 1) \,\}\big)$, kun $n = 5$.

50. Selosta alla määriteltyjen käsitteiden intuitiivinen merkitys, ja anna niille uudet, kuvaavammat nimet. Käsitteet liittyvät suunnattuun graafiin (V, E).

   (a) $A \subseteq V$ on *lupsahdus*, jos ja vain jos

   $$\forall u \in A : \forall v \in A : u \to^* v \wedge v \to^* u \quad \text{ja}$$
   $$\forall u \in A : \forall v \in V - A : \neg(u \to^* v) \vee \neg(v \to^* u)$$

   (b) Lupsahdus A on *öhrööttinen*, jos ja vain jos

   $$\forall u \in A : \forall v \in V : (u, v) \in E \to v \in A$$

   (c) Lupsahdus A on *pinkeä*, jos ja vain jos

   $$\exists u \in A : \exists v \in A : (u, v) \in E$$

   (d) Piirrä esimerkki 1. pinkeästä öhrööttisestä 2. pinkeästä epäöhrööttisestä 3. epäpinkeästä öhrööttisestä 4. epäpinkeästä epäöhrööttisestä lupsahduksesta, jos sellainen on olemassa.

51. Olkoon $G = (V, E)$ suunnattu graafi. Seuraava operaatio tuottaa muuten samanlaisen graafin, mutta jossa on jokin uusi solmu ja tästä uudesta solmusta on kaari kaikkiin muihin solmuihin: *lisää*$(G) := (V', E')$, missä $V' = V \cup \{v\}$, $v \notin V$ ja $E' = E \cup (\{v\} \times V)$.

   Määrittele seuraavat operaatiot tai käsitteet. Anna niille lyhyt nimi ja parametrit.

   (a) Operaatio, joka lisää suunnattuun graafiin solmun v ja kaaret siten, että v:stä sekä kaikista niistä solmuista, joista ei lähtenyt kaaria, lähtee nyt kaari solmuun v.

   (b) Operaatio, joka ottaa parametreikseen suunnatun graafin ja joukon W solmuja (jotka eivät välttämättä ole ko. graafin solmuja) ja poistaa graafista kaaria siten, että W:hen kuuluvista solmuista lähtee kaaria vain W:hen kuuluviin solmuihin ja niistä solmuista, jotka eivät kuulu W:hen, lähtee kaaria vain niihin solmuihin, jotka eivät kuulu W:hen. Muuten alkuperäiset kaaret säilyvät.

   (c) Predikaatti, joka kertoo, onko annettu suunnattu graafi *melkein kaksiosainen* siten, että sen solmut jakautuvat kahteen erilliseen joukkoon, niin että muita kaaria kuin paikallissilmukoita ei ole saman joukon solmujen välillä.

52. Piirrä lausekepuut. Tulkitse kvanttorit operaattoreiksi, pelkkä kaksoispistenotaatio ottaa kaksi parametria ja puolipistenotaatio kolme parametria. “r” on funktio, joka ottaa parametrikseen merkkijonon ja palauttaa merkkijonon.

    (a) $-\frac{1}{x} - x - x^{-1}$

    (b) $r(\alpha\beta) = r(\beta)r(\alpha)$.

    (c) **for** $i := k-1$ **to** $n+k-1$ **do if** $A[i] \neq 0$ **then** $A[i] := A[i-1]+1$ **else** $A[i] := 0$ **endif endfor**

    (d) $\exists i : 1 \leq i \wedge i \leq n \wedge A[i] = x \wedge \forall j\,; 1 \leq j \wedge j \leq n \wedge j \neq i : A[j] \neq A[i]$

53. Olkoon Σ joukko merkkejä, $a \in \Sigma$ ja $\alpha, \beta, \gamma \in \Sigma^*$. Lisäksi on annettu kaavat: ε on *tyhjä merkkijono*, jolle pätee (1) $\varepsilon\alpha = \alpha$ ja (2) $\alpha\varepsilon = \alpha$. Merkkijonoille pätee *liitännäisyys* eli (3) $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Määritellään funktio *reverse* $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ seuraavasti: (4) $r(\varepsilon) = \varepsilon$ ja (5) $r(\alpha a) = a\,r(\alpha)$.

    Nyt voidaan osoittaa (6) $r(a) = a$ seuraavasti: $r(a) \overset{1}{=} r(\varepsilon a) \overset{5}{=} a\,r(\varepsilon) \overset{4}{=} a\varepsilon \overset{2}{=} a$.

    Osoita käyttäen kaavoja (1)-(6) ja induktio-oletusta (io), että (7) $r(\alpha\beta) = r(\beta)r(\alpha)$. Merkitse käyttämäsi kaava tai induktio-oletus =-merkin yläpuolelle yo. esimerkin mukaisesti.

    IP: $r(\alpha\varepsilon) \overset{?}{=} \ldots \overset{?}{=} r(\varepsilon)r(\alpha)$.
    IO: $r(\alpha\beta) = r(\beta)r(\alpha)$, missä $|\beta| \geq 0$.
    IA: $r(\alpha(\beta a)) \overset{?}{=} \ldots$.

54. Oletetaan tehtävän 53 käsitteet ja kaavat annetuiksi. (Voit siis tehdä tämän tehtävän, vaikka et olisikaan ratkaissut tehtävää 53.) Annetaan vielä kaavat (8) $\alpha^0 = \varepsilon$, (9) $\alpha^k = \alpha^{k-1}\alpha$ ja (10) $\alpha^k = \alpha\alpha^{k-1}$, kun $k \geq 0$.

    Osoita käyttäen kaavoja (1)-(10) ja tämän tehtävän induktio-oletusta, että (11) $r(\alpha^n) = r(\alpha)^n$, kun $n \geq 0$.

    IP:
    IO:
    IA:

Tehtäväryhmä 10

55. Oletetaan tehtävien 53 ja 54 käsitteet ja kaavat annetuiksi. (Voit siis tehdä tämän tehtävän, vaikka et olisikaan ratkaissut ao. tehtäviä.)

    Määritellään äärellisen merkkijonon $a_1 \cdots a_n$ *pituus* $|\, a_1 \cdots a_n \,|$ seuraavasti:
    (12) $|\, \varepsilon \,| = 0$ ja (13) $|\, a_1 \cdots a_n \,| = |\, a_1 \cdots a_{n-1} \,| + 1$, kun $n \geq 1$.

    Osoita käyttäen kaavoja (1)-(13), induktiota sekä tuttuja kokonaislukujen ja yhteenlaskun ominaisuuksia, että jos $\alpha, \beta \in \Sigma^*$, niin (14) $|\, \alpha\beta \,| = |\, \alpha \,| + |\, \beta \,|$.

56. Anna spesifikaatiot seuraaville tehtäville.

    (a) Etsi suurimman alkion paikka taulukossa $A[1 \ldots n]$.

    (b) Aseta x:lle taulukon $A[1 \ldots n]$ suurin arvo.

    (c) Etsi ensimmäinen paikka, jossa on taulukon $A[1 \ldots n]$ suurin alkio.

    (d) Viimeisen kohdan, jossa taulukossa $A[1 \ldots n]$ on suurin arvo, arvoksi asetetaan x.

57. Olet määrittelemässä komentorivieditoria ja tehtäväsi on tehdä spesifikaatiot seuraaville funktioille (ohjelman pätkille). Huomaa, että tyhjä merkkijono on laillinen syöte. Tee tarvittaessa apupredikaatteja ja/tai -funktiota.

    (a) Ohjelma saa parametrinaan äärellisen merkkijonon ja palauttaa muuten samanlaisen merkkijonon, mutta alusta ja lopusta on poistettu kaikki välilyönnit (voit merkitä välilyöntiä $\not{b}$:llä) ja keskellä olevia siten, että peräkkäisistä välilyönneistä tasan yksi jätetään.

    (b) Ohjelma saa parametrikseen (a)-kohdan tuottaman merkkijonon ja tuottaa kaksi taulukkoa A ja P. Tehtävänä on "pilkkoa" syöte mahdollisimman pitkiin merkkijonoihin siten, että niissä ei ole välilyöntejä. Kun i ei indeksoi ohi, niin $A[i]$:ssä on tieto, mistä kohdin parametria alkaa i:s tällainen merkkijono ja $P[i]$:ssä ko. merkkijonon pituus.

58. Piirrä lausekkeen $-1+2-3+4$ lausekepuu ja laske sen arvo, kun $+$ on infix-operaattori ja $-$ sekä prefix- että infix-operaattori, mutta infix-operaattoreille pätee

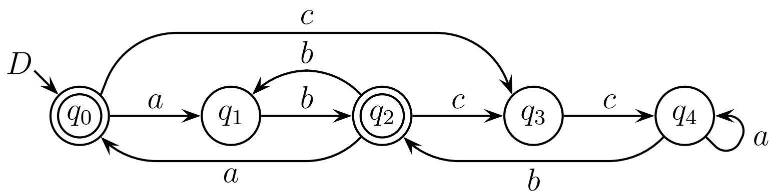
    (a) $+$ ja $-$ sitovat yhtä voimakkaasti

    (b) $+$ sitoo voimakkaammin kuin $-$

    (c) $-$ sitoo voimakkaammin kuin $+$

    (d) Tee kohdat (a)–(c) myös lausekkeeelle $-1+(2-3)+4$.

59. On annettu oheinen DFA D.



(a) Luettele D:n Q, Σ, δ, $\hat{q}$ ja F. δ lienee kätevintä ilmaista taulukkona, jonka rivejä indeksoivat tilat ja sarakkeita aakkoset.

(b) Kuuluuko $\varepsilon \in \mathcal{L}(D)$?

(c) Entä $abc \in \mathcal{L}(D)$?

(d) Mikä on lyhin D:n hyväksymä merkkijono, jossa on merkki c?

(e) Voiko D hyväksyä merkkijonon, jossa on kaksi a:ta peräkkäin?

(f) Voiko D hyväksyä merkkijonon, jossa on kaksi b:ta peräkkäin?

Muista perustella vastauksesi.

60. Mitkä seuraavista kohdista eivät ole säännöllisiä lausekkeita? Esitä ne säännöllisinä lausekkeina ja piirrä DFA:t, jotka hyväksyvät kyseiset kielet.

(a) $abbac^*$

(b) $(a|b)^2b^*(b|c)$

(c) $(a^*|c^*)^2bc^3a^*$

(d) $a^+b^*|c^+$

(e) $a^+(a|b|c)^*b$

(f) $(a^+)^+$

Tehtäväryhmä 11

61. Paljonko on seuraavien säännöllisten lausekkeiden tai niitä vastaavien säännöllisten lausekkeiden pituudet. Anna lisäksi merkkijonon r pituudelle alaraja ja yläraja, kun se kuuluu ko. kohtien määrittelemiin kieliin.

    (a) a

    (b) a^0

    (c) ε

    (d) $a|aa|aaa$

    (e) aa^*

    (f) a^+

    (g) $(a^*|a)^+b^+$

    (h) $a(a^*|b)^5$

    (i) $(a(ab|c)^3)^2$

62. Piirrä DFA:t, jotka hyväksyvät seuraavat kielet sekä kirjoita kohtia (a), (b) ja (c) vastaavat säännölliset lausekkeet. Tarpeettomia etunollia ei hyväksytä.

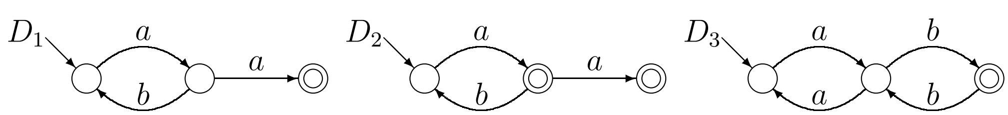
    (a) parittomat luonnolliset luvut 2-järjestelmässä,

    (b) 4:llä jaolliset luonnolliset luvut 2-järjestelmässä,

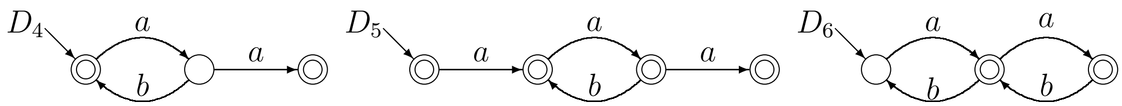
    (c) parilliset luonnolliset luvut 10-järjestelmässä ja

    (d) kolmella jaolliset luonnolliset luvut 10-järjestelmässä.

63. Muodosta seuraaville DFA:ille vastaavan kielen määrittelevät säännölliset lausekkeet vaiheittain niinkuin prujussa luvussa ”5.4 Epädeterministiset äärelliset automaatit” neuvotaan. Valmistaudu näyttämään taululla nämä vaiheet.



64. Muodosta seuraaville DFA:ille vastaavan kielen määrittelevät säännölliset lausekkeet vaiheittain niinkuin prujussa luvussa ”5.4 Epädeterministiset äärelliset automaatit” neuvotaan. Valmistaudu näyttämään taululla nämä vaiheet. Vertaa tehtävään 63.



65. Määrittele operaatio nlc, joka poistaa DFA:sta mahdollisimman monta tilaa siten, että hyväksytty kieli ei muutu. Voit olettaa, että DFA:ssa ei ole saavuttamattomia tiloja. Mitä operaatiosi tekee, jos lopputilojen joukko on tyhjä? Muista tarkistaa, että lopputulos on DFA.

66. Piirrä DFA:t, jotka hyväksyvat seuraavat kielet

    (a) $(0|1)^*101100$. Kerro sanallisesti kielen intuitiivinen merkitys.

    (b) Jossain kohdin syötettä on merkkijono “101100”.

    (c) Syötteessä ei ole merkkijonoa “101100”.

    (d) Merkkijono “101100” esiintyy syötteessä tasan kerran.

Tehtäväryhmä 12

67. Piirrä pienin DFA, joka hyväksyy saman kielen kuin tehtävän 59 DFA. Tee minimointi algoritmilla.

68. Piirrä DFA:t D_1 ja D_2 siten, että kummassakin on ainakin yksi saavuttamaton tila, $[[D_1]]$:ssä on ainakin yksi saavuttamaton tila, ja $[[D_2]]$:ssa ei ole saavuttamattomia tiloja.

69. Olkoon $\Sigma = \{1, 2, \ldots, n\}$.

    (a) Piirrä mahdollisimman pieni DFA D_5, jolle $\mathcal{L}(D_n) = \{12 \cdots n\}$ (nyt 123 ei tarkoita satakaksikymmentäkolme, vaan jonoa $\langle 1, 2, 3\rangle$).

    (b) Piirrä $\mathsf{compl}(D_5)$.

    (c) Osoita, ettei $\mathsf{compl}(D_5)$:ia voi pienentää.

    (d) Vertaa D_n:n ja $\mathsf{compl}(D_n)$:n solmujen määriä. Vertaa myös kaarten määriä.

70. (a) Laske prujun luvussa ”5.3. DFA:n operaatioita” loppuosassa olevan päänsärkyesimerkin ensimmäisen ja neljännen automaatin tulo (= ne, joiden aakkostoon “↑särky” kuuluu), ja poista siitä turhat tilat ja tilasiirtymät.

    (b) Lisää tuloon loput kaksi automaattia miten helpoiten onnistut, ja poista lopputuloksesta turhat tilat ja tilasiirtymät. Onko tulos sama kuin prujussa?

71. Luonnollinen luku 10-järjestelmässä on neljällä jaollinen, jos ja vain jos

    - se on 0, 4 tai 8,
    - jos viimeinen numero on 0, 4 tai 8, ja edellinen on parillinen, tai
    - viimeinen numero on 2 tai 6, ja edellinen on pariton.

    (a) Tee säännöllinen lauseke, joka hyväksyy neljällä jaolliset luonnolliset luvut

    (b) Muodosta NFA, joka hyväksyy täsmälleen (a)-kohdan kielen Tämä NFA on helppo muodostaa esimerkiksi niin, että alkutilasta haaraudutaan siten, että hyväksytään erikseen yhden merkin mittaiset hyväksyttävät syötteet ja ε:lla haaraudutaan tutkimaan pidemmät syötteet.

    (c) Determisoi (b)-kohdan NFA käyttäen prujun determisointialgoritmia

    (d) Minimoi (c)-kohdan algoritmi käyttäen prujun minimointialgoritmia

72. Olkoot $N_i = (Q_i, \Sigma_i, \Delta_i, \hat{q}_i, F_i)$, missä i=1,2, NFA:ita siten, että $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$.

    (a) Kerro sanallisesti ja esimerkillä, mitä tarkoittaa $\mathcal{L}(N) = \left\{ \alpha\beta \;\middle|\; \alpha \in \mathcal{L}(N_1) \wedge \beta \in \mathcal{L}(N_2) \right\}$

    (b) Tee operaatio, joka tuottaa NFA:n N, joka täyttää (a)-kohdan vaatimukset

    (c) Todista, että (b)-kohdan tuloksesi on todella NFA.

Tehtäväryhmä 13

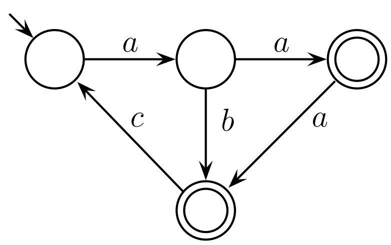
73. (a) Tee NFA, joka hyväksyy kielen $(12)^*((2|11)(21)^*(1|22)(12)^*)^*$.
    (b) Determisoi tekemäsi NFA käyttäen prujun algoritmia.
    (c) Minimoi näin saamasi DFA käyttäen prujun algoritmia.

74. Olkoot N_1 ja N_2 NFA:ita, joilla ei ole yhteisiä tiloja. Suunnittele yksinkertainen ja tehokas algoritmi, joka tuottaa NFA:n, jonka hyväksymä kieli on

    (a) $\mathcal{L}(N_1)^* \cup \mathcal{L}(N_2)^*$ ja
    (b) $(\mathcal{L}(N_1) \cup \mathcal{L}(N_2))^*$.

    Käytä hyväksesi temppua, joka ei toimi DFA:lle. Riittää, että hahmotat algoritmiesi toiminnan piirroksilla.

75. Piirrä äärellinen automaatti (saa olla epädeterministinen), jonka hyväksymä kieli on kuvan äärellisen automaatin hyväksymät merkkijonot takaperin. Vinkki: automaatin tulee siis toimia “takaperin”.



76. (a) Muunna tehtävän 59 DFA samalla tavalla kuin muunsit tehtävän 75 DFA:n hyväksymään kielen, joka on alkuperäisen kielen suhteen käänteinen.
    (b) Jos saamasi automaatti on epädeterministinen, niin determisoi se käyttäen prujun algoritmia.
    (c) Minimoi saamasi deterministinen automaatti käyttäen prujun algoritmia.

77. Määrittele operaatio $\mathit{uusi}(N, \mathit{id})$, joka nimeää uudelleen NFA:n N tilat ja tilasiirtymät, niin, että tilasta q tulee pari (q, id) ja $\mathcal{L}(\mathit{uusi}(N, \mathit{id})) = \mathcal{L}(N)$. Tarkista, että operaation tulos on NFA.

78. Olkoon Σ aakkosto. Tee BNF^{++}-määritelmä kielelle, joka koostuu vähintään yhdestä *virkkeestä*. Virke koostuu vähintään yhdestä *lauseesta*, joiden välissä on pilkku “,” ja päättyy pisteeseen “.”. Lause koostuu vähintään yhdestä *sanasta*, joiden välissä on vähintään yksi välilyönti. Sana voi olla *luku* tai *merkkijono*. Luku koostuu vähintään yhdestä *numerosta* 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Merkkijonon alussa ja lopussa on pystylainausmerkki “ " ”, ja välissä nolla tai useampi *dekoodattu merkki*. Dekoodattu merkki on joko \\ (dekoodattu pakomerkki), \" (dekoodattu pystylainausmerkki) tai *tavallinen merkki*. Tavallinen merkki kuuluu joukkoon $\Sigma - \{$ " , \ $\}$. Jokaisen, paitsi viimeisen, virkkeen lopettavan pisteen ja jokaisen lauseen lopettavan pilkun jälkeen on oltava vähintään yksi välilyönti.

Tehtäväryhmä 14

79. Anna BNF^{++}-määritelmät seuraaville kielille, kun $\Sigma = \{a, b, c\}$.

    (a) Tee BNF^{++}-määritelmä kielelle "palindromit, joiden pituus on pariton". Palindromi tarkoittaa merkkijonoa, joka on sama luettuna etuperin ja takaperin.

    (b) Tee BNF^{++}-määritelmä kielelle "palindromit".

    (c) $\{\ \alpha \mid$ joka toinen α:n merkki on $a\ \}$,

    (d) Taulukon alkioon viittaaminen kurssin pseudokoodissa, esimerkiksi $A[1, 2x]$. Oleta välisymbolien *Taulukko* (taulukon nimi) ja *Lauseke* olevan annetut.

    (e) Kvanttorin käyttö predikaattilogiikassa, esimerkiksi $\forall i; 1 \leq i < n : A[i] = 0$, $\exists i, j; i \neq j : i \cdot j = i + j$ tai $\exists i : 1 \leq i < n \rightarrow A[i] = 0$. Oleta välisymbolien *Muuttuja* ja *Ehto* olevan annetut.

80. Anna BNF^{++}-määritelmät seuraaville kielille, kun $\Sigma = \{a, b, c\}$.

    (a) $\{\ \alpha \mid \alpha$ on sulkulauseke, missä a on sulut auki, b on sulut kiinni, c ei esiinny ja jossa alku- ja loppusulut täsmäävät $\}$. Esimerkiksi suluilla ilmaistuina "()", "()()" ja "(()()())((())())" kuuluvat tähän kieleen.

    (b) $\{\ \alpha \mid$ jokainen α:n alkuosa sisältää ainakin yhtä paljon a-kirjaimia kuin b-kirjaimia $\}$ (merkkijonon $a_1 a_2 \cdots a_n$ *alkuosa* on mikä tahansa merkkijonon alusta erotettu osajono eli $a_1 a_2 \cdots a_k$, missä $k \leq n$).

    (c) $\{\ \alpha \mid \alpha$:ssa on tasan kaksi kertaa niin monta a-kirjainta kuin siinä on b-kirjaimia $\}$.

81. Anna BNF^{++}-määritelmät kielille $\left\{\ a_1 a_2 \cdots a_n \in \{a, b\}^* \mid \varphi(a_1 a_2 \cdots a_n)\ \right\}$, missä $\varphi(a_1 a_2 \cdots a_n)$ on

    (a) $n \geq 2 \wedge a_2 = a$,

    (b) $\exists i; 1 \leq i \leq n : a_i = b \wedge (\forall j; 1 \leq j < i : a_j = a) \wedge \forall j; 1 \leq j \leq i : a_j = a_{n+1-j}$,

    (c) $\forall i; 1 \leq i < n : a_{i+1} \neq a_i$.

82. Laadi BNF^{++}-määritelmä säännöllisten lausekkeiden määrittelykielelle (siis sille, jonka avulla määritellään säännöllisiä lausekkeita).

83. Tee yhteysriippumaton kielioppi, joka hyväksyy seuraavat kielet:

    (a) $(ab)^*|(bc)^*$

    (b) $(ab|bc)^*$

    (c) $((abc)^+|bc)^*$

    (d) $(abc^+|bc)^*$

    (e) $A ::= \varepsilon|ab[B]b$
    $B ::= aC^*$
    $C ::= Aa$

84. Tee BNF^{++}-määritelmä *FA* (Finite Automaton, äärellinen automaatti) kielelle, jolla voidaan kirjoittaa lausekkeita, joilla käsitellään *DFA*:ita ja *NFA*:ita käyttäen tällä kurssilla määriteltyjä tuttuja operaatioita.

Kielioppia noudattamalla pitää voida varmistaa, että operaatioita, jotka on määritelty vain DFA:ille käytetään vain DFA-parametreilla. Sääntöjä muodostaessasi huomioi, että jokainen DFA on myös NFA. Määritellyt operaattorit ovat

- $\cdot \times \cdot$, joka tuottaa DFA:n vain, jos molemmat parametrit ovat DFA:ita, muuten NFA:n;
- $\mathsf{cln}(\cdot)$ ja $\mathsf{nlc}(\cdot)$ on määritelty molemmille tyypeille ja tulos on samaa tyyppiä kuin parametrikin;
- $\mathsf{full}(\cdot)$, $\mathsf{compl}(\cdot)$ ja $\mathsf{min}(\cdot)$ on määritelty vain DFA:ille ja tuottavat DFA:n;
- $\mathsf{det}(\cdot)$ on määritelty molemmille tyypeille, mutta tulos on aina DFA;
- sulkuja "(" ja ")" voi käyttää normaalisti ja
- loppusymboli D edustaa nimettyjä DFA:ita ja N nimettyjä NFA:ita;

Kieliopin pitää siis hyväksyä esimerkiksi

"$(\mathsf{compl}(D_1 \times \mathsf{det}(N_1))) \times \mathsf{compl}(\mathsf{min}(\mathsf{det}(\mathsf{nlc}(\mathsf{cln}(D_1)))))$",

mutta ei

"$\mathsf{full}(N_1 \times D_1)$", kun D_1 on DFA ja N_1 on NFA.

Tehtäväryhmä 15

85. Laadi BNF^{++}-määritelmä seuraavalle kielelle. jolla voidaan kuvata *oliota*, jotka voivat olla *joukkoja* tai *monikkoja* seuraavasti: Joukko voi olla tyhjä joukko $\emptyset$, sitä voidaan merkitä *joukkosymbolilla* $A, \ldots, Z$ tai se voi olla aaltosulkujen "{" ja "}" välissä oleva luettelo olioita. Luettelossa on vähintään yksi pilkuilla "," eroteltu olio. Monikko on kaarisulkujen "(" ja ")" välissä oleva joko tyhjä merkkijono tai luettelo olioita.

    Esimerkiksi $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, $(A, A, \{A, B, (C)\})$ ja $((), ())$ kuuluvat kieleen.

86. Suunnittele yhteysriippumaton kielioppi säännöllisille lausekkeille siten, että laskujärjestys menee niin kuin prujussa on määritelty.

87. Suunnittele seuraavat yhteysriippumattomat kieliopit siten, että laskujärjestys menee tällä kurssilla olevan käytännön mukaisesti.

    (a) Kielioppi *aritmeettisille lausekkeille*, joissa saa olla *lukuja*, etumerkkejä $+$ ja $-$, operaattoreita $+$, $-$, $\cdot$ ja $/$ sekä sulkumerkkejä. Luvut koostuvat vähintään yhdestä numerosta $0, \ldots, 9$.

    (b) Laajenna (a)-kohdan kieli kattamaan *loogiset lausekkeet*, joissa saa olla predikaatteja $<$, $\leq$, $=$, $\neq$, $\geq$ ja $>$, sekä loogisia operaattoreita $\leftrightarrow$, $\rightarrow$, $\wedge$, $\vee$ ja $\neg$.

    (c) Laajenna (b)-kohdan kieli kattamaan myös *kvanttorit* $\forall$ ja $\exists$ sekä *muuttujat* $a, \ldots, z$. Kvanttorinotaatioista on hyväksyttävä puolipiste ja kaksoispiste -notaatio sekä pelkkä kaksoispiste -notaatio, mutta ei kuuluu joukkoon -notaatiota eli muotoa $\forall x \in A : \ldots$ olevia merkintöjä. Kvanttori voi kvantifioida yhden tai useamman muuttujan.

    Huomaa, että (c)-kohdassa joudut täydentämään edellisten kohtien kielioppeja.

88. Olkoon $A ::= \varepsilon \mid B$, $\quad B ::= (\text{"["} \mid \text{"("}\ )\ A\ (\text{")"} \mid \text{"]"}\ )$, $\quad C ::= \varepsilon \mid DC \mid CE$, $D ::= \text{"["}\ C\ \text{"]"}$ ja $E ::= \text{"("}\ C\ \text{")"}$.

    (a) Anna esimerkki merkkijonosta, joka kuuluu kieleen A muttei kieleen C.

    (b) Anna esimerkki merkkijonosta, joka kuuluu kieleen C muttei kieleen A.

    (c) Anna esimerkki merkkijonosta, joka kuuluu kieleen C^+ muttei kieleen A eikä C.

    (d) Piirrä merkkijonon $[()()]$ jäsennyspuu kieliopin C mukaan.

89. Olkoon $A ::= \varepsilon \,|AB$, $\quad B ::=$"(" A")" | "a" | "b". Mitkä seuraavista lausekkeista ovat tämän kieliopin mukaisia? Perustele. Piirrä lisäksi ainakin (d)-kohdasta jäsennyspuu.

    (a) (ab)

    (b) $((a))$

    (c) $(a())$

    (d) $()()$

    (e) $()a()$

    (f) $a()b$

90. Olkoon $A ::= B \mid A$"|" B, $\quad B ::= C \mid BC$, $\quad C ::= A$"*" | "a" | "b" | "c".

    (a) Kuuluuko ab^*c tähän kieleen? Perustele piirtämällä vastaava jäsennyspuu tai osoittamalla, ettei sellaista ole.

    (b) Piirrä lausekkeen $ab|c^*$ jäsennyspuut. Vinkki: niitä on enintään neljä.

    (c) Piirrä jokaista jäsennyspuutasi vastaava lausekepuu.